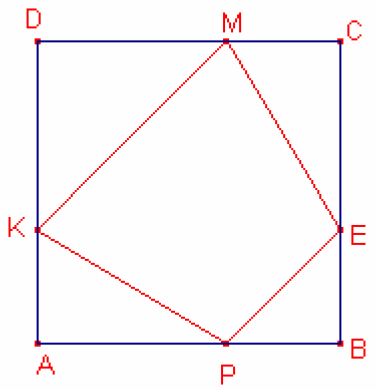
Problemes Geometria 29

1.- Siga un quadrat ABCD de costat 8. En els costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ estan situats els punts P, E, respectivament, tal que $\overline{PB}=\overline{EB}=3$. Determineu els punts K, M dels costats $\overline{AD}$, $\overline{CD}$, respectivament, tal que $\overline{KM}$ és paral·lel a $\overline{PE}$ i el trapezi PEMK tinga àrea màxima.
Gúsiev 551.

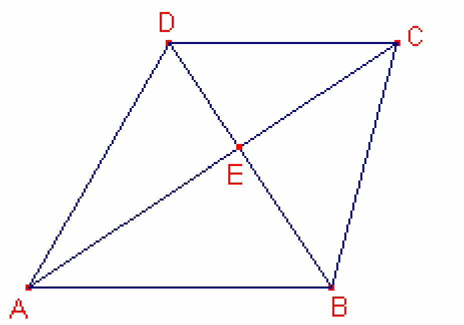


Solució:
$\overline{AB}=8$.
Siga $x=\overline{DK}=\overline{DM}$, en aquest cas $\overline{KM}$ és paral·lel a $\overline{PE}$.
$S_{PEMK}=S_{ABCD}-(S_{DKM}+S_{APK}+S_{BEP}+S_{CME})$
$$S_{PEMK}=8^2-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{5(8-x)}{2}+\frac{3^2}{2}+\frac{5(8-x)}{2}\right).$$
$$S_{PEMK}=-\frac{x^2}{2}+5x+\frac{39}{2}.$$
La funció és una paràbola convexa el màxim s'assoleix en el vèrtex.
El vèrtex és $x=5$.
És a dir, el trapezi d'àrea màxima s'assoleix quan $\overline{DK}=\overline{DM}=5$.
La superfície màxima del trapezi és $-\frac{25}{2}+25+\frac{39}{2}=32$. Notem que és la meitat del quadrat.

Generalització:
Siga un quadrat ABCD de costat c. En els costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ estan situats els punts P, E, respectivament, tal que $\overline{PB}=\overline{EB}=a$. Determineu els punts K, M dels costats $\overline{AD}$, $\overline{CD}$, respectivament, tal que $\overline{KM}$ és paral·lel a $\overline{PE}$ i el trapezi PEMK tinga àrea màxima.

Solució:
$\overline{AB}=8$.
Siga $x=\overline{DK}=\overline{DM}$, en aquest cas $\overline{KM}$ és paral·lel a $\overline{PE}$.
$S_{PEMK}=S_{ABCD}-(S_{DKM}+S_{APK}+S_{BEP}+S_{CME})$
$$S_{PEMK}=c^2-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{(c-a)(c-x)}{2}+\frac{a^2}{2}+\frac{(c-a)(c-x)}{2}\right).$$
$$S_{PEMK}=-\frac{x^2}{2}+(c-a)x+c^2-\frac{a^2}{2}+ac.$$
La funció és una paràbola convexa el màxim s'assoleix en el vèrtex.
El vèrtex és $x=c-a$.
És a dir, el trapezi d'àrea màxima s'assoleix quan $\overline{DK}=\overline{DM}=c-a$..
La superfície màxima del trapezi és $\frac{c^2}{2}$. Notem que és la meitat del quadrat.

2.- Un trapezi amb diagonals perpendiculars la base major mesura 4 i la menor 3. Determineu la mesura d'un dels costats laterals si sabem que aquest costat lateral forma 60º amb la base major.
Gúsiev 446.



Solució 1:
Siga el trapezi ABCD de bases paral·leles $\overline{AB} = 4$, $\overline{CD} = 3$.
Siga $A = 60^{\circ}$.
Siga $\overline{AD} = x$ el costat que volem determinar.
$D = 120^{\circ}$.
Siga E la intersecció de les diagonals.
Els triangles $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{CDE}$ són semblants i la raó de semblança és 4:3.
Siga $\overline{CE} = 3y$, aleshores, $\overline{AE} = 4y$.
Siga $\overline{DE} = 3z$, aleshores, $\overline{BE} = 4z$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ACD}$:
$(7y)^2 = 3^2 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \cos 120^{\circ}$.
$49y^2 = x^2 - 3x + 9$ (1)

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:
$(7y)^2 = 4^2 + x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x \cdot \cos 60^{\circ}$.
$49y^2 = x^2 - 4x + 16$ (2)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDE}$:
$3^2 = (3y)^2 + (3z)^2$.
$y^2 + z^2 = 1$ (3)
Sumant les expressions (1) (2):
$49(y^2 + z^2) = 2x^2 - x + 25$ (4)
Substituint les expressions (1) en l'expressió (4):
$49 = 2x^2 - x + 25$.
Resolent l'equació: $x = \overline{AD} = \dfrac{1+\sqrt{193}}{4}$.

Solució 2:
Considerem els vectors $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 4$.
Els vectors $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ són ortogonals, aleshores, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

$$0 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

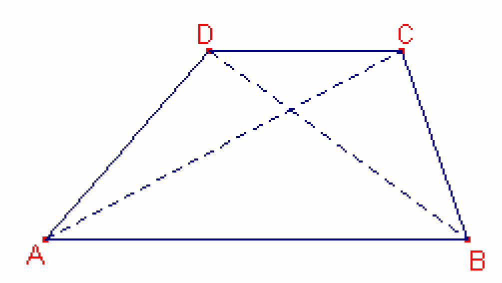
$\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 - \frac{3}{4}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \frac{1}{4}\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \cos 60^{\circ} = 0$.

$2\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\| - 24 = 0$. Resolent l'equació: $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \dfrac{1+\sqrt{193}}{4}$.

3.- En qualsevol trapezi ABCD de bases paral·leles $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ s'acompleix:

$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CD}$.

Gúsiev 450.



Solució:

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$\overline{AC}^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$

$\overline{AC}^2=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BC}$ (1)

$\dot{BD}=\dot{AD}-\dot{AB}$, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}$

$\overline{BD}^2=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}\right)$

$\overline{BD}^2=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC}$ (2)

Sumant Les expressions (1) (2):

$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overrightarrow{AD}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}\right)+\overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}\right)+2\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$.

$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}+2\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$.

$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2+2\cdot\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{DC}\right\|\cos 0^{\circ}$.

$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2+2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CD}$

4.- Per l'angle rectes C d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ s'ha traçat una recta i des dels vèrtexs A i B s'han traçat perpendiculars AA_1 BB_1 a la recta anterior.

Siga C_1 el simètric de C respecte del punt mig M dels segment $\overline{A_1B_1}$.

Proveu que l'angle $\angle AC_1B = 90^o$.

Gúsiev 456.

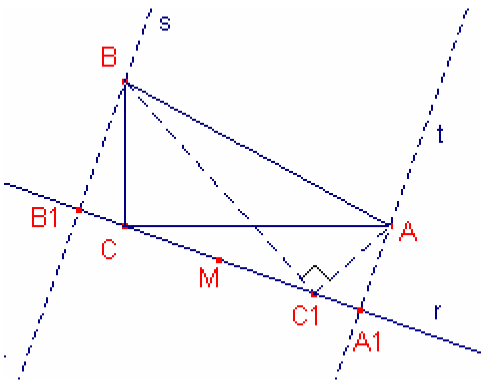
Solució:

Siguen $A(b,0)$, $B(a,0)$, $C(0,0)$ les coordenades del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga $r \equiv y = mx$ una recta que passa pel vèrtex C del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

La recta perpendicular a r que passa pel B té equació:

$$s \equiv y = \frac{-1}{m}x + a.$$



La intersecció de les rectes r i s és B_1 de coordenades:

$$B_1\left(\frac{am}{1+m^2}, \frac{am^2}{1+m^2}\right).$$

La recta perpendicular a r que passa pel A té equació:

$$s \equiv y = \frac{-1}{m}(x-b).$$

La intersecció de les rectes r i s és A_1 de coordenades:

$$A_1\left(\frac{b}{1+m^2}, \frac{bm}{1+m^2}\right).$$

El punt mig M dels segment $\overline{A_1B_1}$ té coordenades:

$$M\left(\frac{am+b}{2(1+m^2)}, \frac{m(am+b)}{2(1+m^2)}\right).$$

El punt simètric C_1 de C respecte del punt mig M dels segment $\overline{A_1B_1}$ té coordenades:

$$C_1\left(\frac{am+b}{1+m^2}, \frac{m(am+b)}{1+m^2}\right).$$

Calculem les components dels vectors $\vec{C_1A}$, $\vec{C_1B}$:

$$\overrightarrow{C_1A} = \frac{m}{1+m^2}\left(bm-a, -am-b\right), \quad \overrightarrow{C_1B} = \frac{1}{1+m^2}\left(-am-b, a-bm\right).$$

Vegem que el seu producte escalar és zero:

$$\overrightarrow{C_1A}\cdot\overrightarrow{C_1B} = \frac{m}{1+m^2}\left(bm-a, -am-b\right)\cdot\frac{1}{1+m^2}\left(-am-b, a-bm\right) =$$

$$= \frac{m}{(1+m^2)^2}\left(-abm^2 - b^2m + a^2m + ab - a^2m + abm^2 - ab + b^2m\right) = 0.$$

Aleshores, $\angle AC_1B = 90^o$.

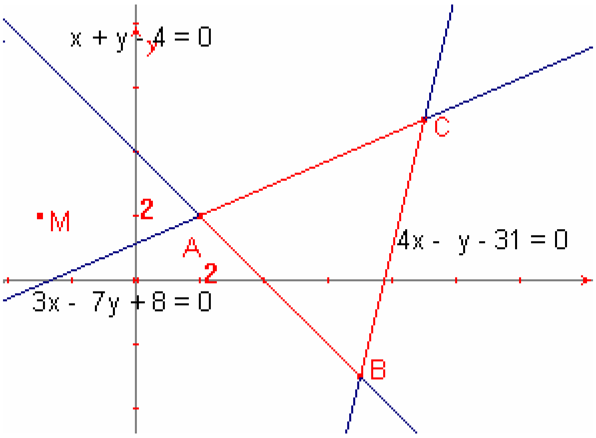
Si $m = 0$ o bé $r \equiv x = 0$ el problema no té solució.

5.- Determineu si el punt $M(-3,2)$ està dins o fora del triangle els costats del qual determinen les rectes $r \equiv x+y-4=0$, $s \equiv 3x-7y+8=0$, $t \equiv 4x-y-31=0$.
Kletenik 344.

Solució:
Determinem els vèrtexs del triangle format per les tres rectes.
Siga el vèrtex A la intersecció de les rectes r, s.
Resolent el sistema: $A(2,2)$.
Siga el vèrtex B la intersecció de les rectes r, t.
Resolent el sistema: $B(7,-3)$.
Siga el vèrtex C la intersecció de les rectes s, t.
Resolent el sistema: $C(9,5)$.
Estudiem la solució de la regió que ocupa el triangle
Vegem en quin semiplànol està el punt C respecte de la recta r.
Al substituir les coordenades de C en l'equació general de r:
$9+5-4>0$.
Aleshores, $x+y-4 \geq 0$.
Vegem en quin semiplànol està el punt B respecte de la recta s.
Al substituir les coordenades de B en l'equació general de s:
$3 \cdot 7-7(-3)+8>0$.
Aleshores, $3x-7y+8 \geq 0$.
Vegem en quin semiplànol està el punt A respecte de la recta t.
Al substituir les coordenades de A en l'equació general de t:
$4 \cdot 2-2-31<0$.
Aleshores, $4x-y-31 \leq 0$.

Per tant el triangle i el seu interior compleixen: $\begin{cases} x+y-4 \geq 0 \\ 3x-7y+8 \geq 0 \\ 4x-y-31 \leq 0 \end{cases}$.

El punt $M(-3,2)$ pertany al triangle o al seu interior si satisfà totes les inequacions del sistema.
La primera no l'acompleix ja que $-3+2-4<0$.
Aleshores, M és exterior al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



6.- En el costat $\overline{AD}$ i en la diagonal $\overline{AC}$ del paral·lelogram ABCD s'agafen els punts M i N tal que $\overline{AM} = \frac{1}{5}\overline{AD}$, $\overline{AN} = \frac{1}{6}\overline{AC}$. Demostreu que els punts M, N, B estan alineats. Determineu la raó en que divideix el punt N el segment $\overline{BM}$.
Gúsiev 433.

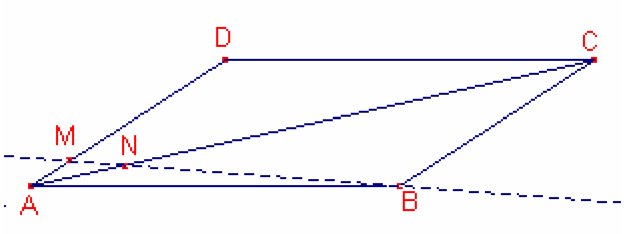
Solució:
Considerem la base del plànol $\{\vec{AB}, \vec{AD}\}$.

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$

$\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = \frac{-5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

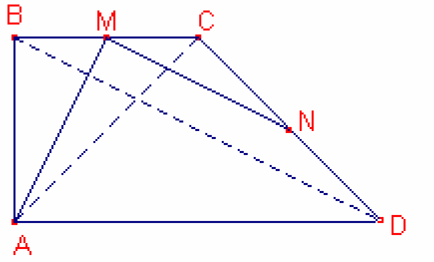


$\overrightarrow{BM} = \frac{6}{5}\overrightarrow{BN}$. Aleshores els punts M, N, B estan alineats.

$\frac{\overline{BM}}{\overline{BN}} = \frac{6}{5} = \frac{\overline{MN} + \overline{BN}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BN}} + 1$. Aleshores, $\frac{\overline{MN}}{\overline{BN}} = \frac{1}{5}$.

7.- En un trapezi rectangle ABCD amb un angle agut de 45º la diagonal $\overline{AC}$ és igual al costat $\overline{CD}$. Demostreu que el punt mig de la base menor és equidistant del vèrtex A i del punt mig del costat $\overline{CD}$.
Gúsiev 466.

Solució:
Siga el trapezi ABCD de costats paral·lels $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $A = B = 90º$.
$D = 45º$, $B = 135º$.
Com que $\overline{AC} = \overline{CD} = a$, aleshores, $\angle CAD = 45º$, $\angle ACD = 90º$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACD}$:
$\overline{AD} = a\sqrt{2}$.
$\angle BAC = 45º$, $\angle ACB = 45º$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$\overline{BD} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{a}\right)^2} = a\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

$\overline{MN}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ aleshores:

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BD} = a\sqrt{\frac{5}{8}}.$$

$$\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

$$\overline{AM} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = a\sqrt{\frac{5}{8}}.$$

Ampliació:

$$\overline{CN} = \frac{a}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACN}$:

$$\overline{AN} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{\frac{5}{4}}.$$

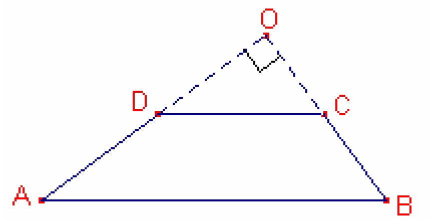
Notem que $\overline{AN}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MN}^2$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{AMN}$ és rectangle i isòsceles.

8.- Demostreu que si en un trapezi els costats no paral·lels són perpendiculars, la suma dels quadrats de les bases és igual al la suma dels quadrats de les diagonals. *Gúsiev 512.*

Solució:

Siga el trapezi ABCD de baes paral·leles $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ i tal que els costats laterals $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ són perpendiculars.

Les rectes AD, BC s'intersecten en el punt O.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACO}$:

$\overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2$ (1)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BDO}$:

$\overline{BD}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OD}^2$ (2)

Sumant les expressions (1) (2):

$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2$ (3)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABO}$:

$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$ (4)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DCO}$:

$\overline{CD}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OC}^2$ (5)

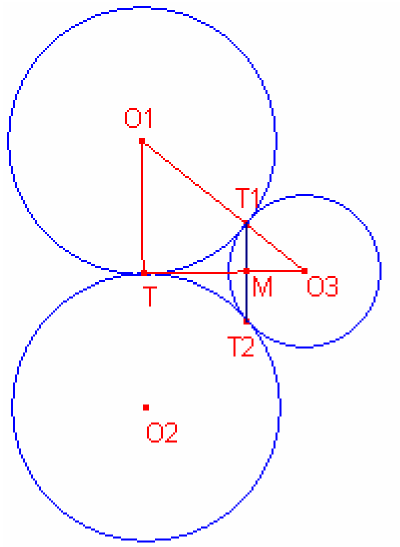
Sumant les expressions (1) (2):

$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2$ (6)

Aleshores, $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$.

9.- Dues circumferències iguals són tangents exteriors i tangents exteriors a una tercera circumferència de radi 8cm.
El segment que uneix els punts de tangència de les dues circumferències iguals amb la tercera circumferència mesura 12cm.
Determineu el radi de les dues circumferències iguals
Gúsiev 116.

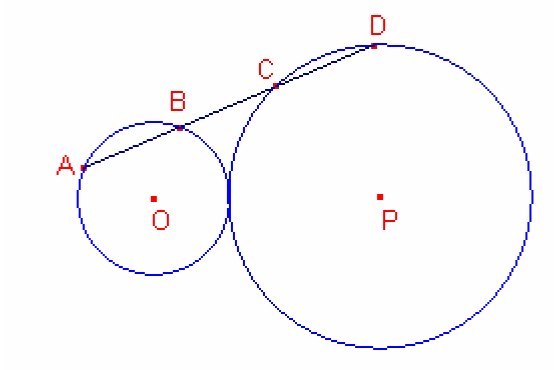
Solució.
Siguen les dues circumferències iguals de radi R i centres O_1, O_2.
Siga la circumferència de radi 8 tangent exterior a les dues anteriors.
Siguen T_1, T_2 els punts de tangència de les dues circumferències iguals amb la tercera circumferència
$\overline{T_1T_2} = 12$.
Siga T el punt de tangència de les dues circumferències iguals.
$\overline{O_1T} = R$, $\overline{O_1O_3} = R + 8$, $\overline{T_1O_3} = 8$.



El triangle $\overset{\Delta}{TO_3O_1}$ és rectangle $T = 90^{o}$.
Siga M el punt mig del segment $\overline{T_1T_2}$.
$\overline{MT_1} = 6$
Els triangles $\overset{\Delta}{TO_3O_1}$, $\overset{\Delta}{MO_3T_1}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{TO_1}}{\overline{O_1O_3}} = \frac{\overline{MT_1}}{\overline{T_1O_3}}.$$
$\frac{R}{R+8} = \frac{6}{8}$. Resolent l'equació:
$R = 24\text{cm}$.

10.- Dues circumferències de radis r, R són tangents exteriors.
La recta s talla les circumferències en els punts A, B,C, D de forma que
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$.
Determineu la mesura del segment $\overline{AD}$.
Gúsiev 119.

Solució:

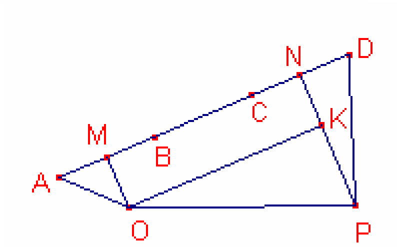


Siga la circumferència de radi r i centre O.
Siga la circumferència de radi R i centre P.
La recta s talla la primera circumferència en els punts A,B i la segona circumferència en els punts CD. Siga $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = x$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$, $\overline{AM} = \frac{x}{2}$.

Siga N el punt mig del segment $\overline{CD}$, $\overline{ND} = \frac{x}{2}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{AMO}$, $\overset{\Delta}{DNP}$ són rectangles.



Siga K la projecció de O sobre el segment $\overline{PN}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:

$$\overline{OM} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4r^2 - x^2}}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DNP}$:

$$\overline{OM} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4r^2 - x^2}}{2}.$$

$$\overline{PK} = \overline{PN} - \overline{OM} = \frac{\sqrt{4R^2 - x^2}}{2} - \frac{\sqrt{4r^2 - x^2}}{2}.$$

$\overline{OK} = \overline{MN} = 2x$. $\overline{OP} = R + r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DNP}$:

$$(R + r)^2 = (2x)^2 + \left(\frac{\sqrt{4R^2 - x^2}}{2} - \frac{\sqrt{4r^2 - x^2}}{2}\right)^2.$$

$$2rR = 4x^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(4R^2 - x^2)(4r^2 - x^2)}.$$

Resolent l'equació:

$$x = \sqrt{\frac{14rR - r^2 - R^2}{12}}.$$

$$\overline{AD} = 3x = 3\sqrt{\frac{14rR - r^2 - R^2}{12}}.$$