

Problemes de Geometria 2

1.- Siga el triangle equilàter $\triangle ABC$. Siga P un punt en l'arc menor \widehat{BC} de la circumferència circumscrita al triangle $\triangle ABC$. El segment \overline{AP} talla en el punt D el costat \overline{BC}

Proveu que $\frac{1}{PD} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}$.

2.- Siga el triangle $\triangle ABC$. Siga D un punt del costat \overline{BC} tal que $\overline{CD} = 2 \cdot \overline{BD}$ i siga E un punt del costat \overline{AC} tal que $\overline{AE} = \frac{3}{2} \overline{CE}$. Si l'àrea del triangle $\triangle CED$ és 8cm^2 , calculeu l'àrea del triangle $\triangle ABC$.

3.- En un triangle qualsevol $\triangle ABC$ $r \cdot r_a \leq \frac{a^2}{4}$ on r és en radi de la circumferència inscrita i r_a és en radi de la circumferència exinscrita tangent al costat a.

4.- Siga el triangle acutangle $\triangle ABC$, $\overline{AB} = 10\text{cm}$, $\overline{AC} = 14\text{cm}$. Siguen \overline{AH} altura, \overline{AV} bisectriu, \overline{AM} mitjana, tal que $\overline{HV} = \overline{MV}$. Calculeu l'àrea del triangle $\triangle ABC$.

5.- Siga el triangle $\triangle ABC$ i M el punt mig del costat \overline{AB} .

Si $\angle CAM + \angle MCB = 90^\circ$, aleshores, el triangle $\triangle ABC$ és rectangle o isòsceles.

6.- Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$. Siga D el punt mig del costat \overline{BC} . Siga F el punt mig de \overline{AB} , E el punt mig de \overline{AF} , G el punt mig de \overline{FB} . Siga P la intersecció de \overline{AD} i \overline{CE} . Siga Q la intersecció de \overline{AD} i \overline{CF} . Siga R la intersecció de \overline{AD} i \overline{CG} . Calculeu la raó $\frac{PQ}{QR}$.

7.- Siga el triangle acutangle $\triangle ABC$. Siguen \overline{AD} , \overline{BE} , \overline{CF} les altures del triangle. Siga H l'ortocentre. Demostreu que $\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = 2$.

8.- Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$. Siguen \overline{BD} , \overline{CE} bisectrius. Siga I l'incentre.

Determineu la relació entre les àrees del triangle $\triangle IBC$ i del quadrilàter BCDE.

9.- Calculeu la raó entre les àrees d'un triangle i el triangle format per les seues mitjanes.

10.- En un triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$, siga \overline{AD} l'altura sobre la hipotenusa. Siga I_1 l' incentre del triangle $\triangle ADC$, I_2 l' incentre del triangle $\triangle ADB$. Calculeu els angles del triangle $\triangle ABC$ si la suma de les distàncies de I_1, I_2 a l'altura \overline{AD} és igual a $\frac{a}{4}$.

11.- En qualsevol triangle $(p - a)(p - b)(p - c) \leq \frac{abc}{8}$ essent vàlida la igualtat quan el triangle és equilàter. A més a més, $0 < \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.

12.- En un triangle isósceles $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{AC}$, siga \overline{BD} la bisectriu tal que $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{AD}$. Calculeu l'angle A. (Problema resolt en Crux Mathematicorum).

13.- Els quadrats dels costats d'un triangle $\triangle ABC$ són proporcionals a 1, 2, 3. Demostreu que el triangle $\triangle ABC$ i el triangle format per les mitjanes són semblants i que els angles formats per les mitjanes són iguals als angles del triangle $\triangle ABC$.

14.- Si en un triangle $\triangle ABC$ la mitjana $m_a = \frac{b\sqrt{3}}{2}$ i la bisectriu $v_c = \frac{c\sqrt{3}}{2}$ aleshores el triangle és equilàter.