

1.- Siga el triangle $\triangle ABC$.

Si $\cos(3A) + \cos(3B) + \cos(3C) = 1$ aleshores un dels angles és igual a 120° .

Solució:

$$A + B + C = 180^\circ.$$

$$\cos(3A) + \cos(3B) = 1 - \cos(3C).$$

$$\cos(3A) + \cos(3B) = \cos 0^\circ + \cos(180^\circ - 3C).$$

Aplicant transformacions de sumes de cosinus en productes:

$$2 \cdot \cos\left(\frac{3(A+B)}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3(A-B)}{2}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{180^\circ - 3C}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3C - 180^\circ}{2}\right)$$

Simplificant:

$$\cos\left(\frac{3(180^\circ - C)}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3(A-B)}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{180^\circ - 3C}{2}\right)$$

$$\cos\left(270^\circ - \frac{3C}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3(A-B)}{2}\right) = \cos^2\left(90^\circ - \frac{3C}{2}\right)$$

$$-\sin\left(\frac{3C}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3(A-B)}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{3C}{2}\right)$$

Factoritzant:

$$\sin\left(\frac{3C}{2}\right) \cdot \left(\sin\left(\frac{3C}{2}\right) + \cos\left(\frac{3(A-B)}{2}\right)\right) = 0$$

Si $\sin\left(\frac{3C}{2}\right) = 0$, aleshores, $\frac{3C}{2} = 180^\circ$, és a dir, $C = 120^\circ$.

Si $\sin\left(\frac{3C}{2}\right) + \cos\left(\frac{3(A-B)}{2}\right) = 0$, aleshores, $\cos\left(90^\circ + \frac{3C}{2}\right) = \cos\left(\frac{3(A-B)}{2}\right)$.

Aleshores, $90^\circ + \frac{3C}{2} = \frac{3(A-B)}{2}$.

$$A - B - C = 60^\circ, \quad A + B + C = 180^\circ.$$

Sumant les dues expressions:

$$A = 120^\circ.$$

3.-

a) Demostreu que tres segments de longituds donades m, n, p poden ser les mitjanes d'un triangle si i només si es pot construir un triangle que els tinga per costats.

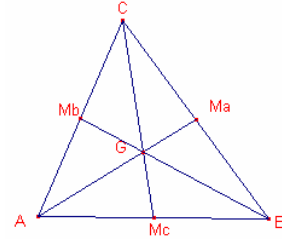
b) Donades tres longitud m, n, p que compleixen la condició anterior, calculeu les longituds d'un triangle que té per mitjanes m, n, p .

Solució:

a)

Siga $\triangle ABC$ un triangle de mitjanes de longitud m, n, p . Volem veure que amb aquestes longituds es pot formar un triangle. Vegem que es compleixen les desigualtats triangulars:

Siguen $m = \overline{AM_A}, n = \overline{BM_B}, p = \overline{CM_C}$



Aplicant la desigualtat triangular al triangle $\triangle AGM_C$ $\frac{2}{3}m < \frac{1}{3}p + \frac{c}{2}$

Aplicant la desigualtat triangular al triangle $\triangle AGM_B$ $\frac{2}{3}m < \frac{1}{3}n + \frac{b}{2}$

Sumant les dues desigualtats $\frac{4}{3}m < \frac{1}{3}(n+p) + \frac{c}{2} + \frac{b}{2}$.

Aplicant la desigualtat triangular al triangle $\triangle BGM_A$ $\frac{c}{2} < \frac{1}{3}p + \frac{2}{3}n$

Aplicant la desigualtat triangular al triangle $\triangle CGM_B$ $\frac{b}{2} < \frac{1}{3}n + \frac{2}{3}p$

Aleshores:

$$\frac{4}{3}m < \frac{1}{3}(n+p) + \frac{c}{2} + \frac{b}{2} < \frac{1}{3}(n+p) + \frac{1}{3}p + \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}n + \frac{2}{3}p = \frac{4}{3}(n+p)$$

Per tant $m < n+p$

Anàlogament provaríem que $n < m+p$, $p < m+n$.

Aleshores si tenim tres segments m, n, p que formen un triangle es pot format un

triangle $\triangle ABC$ que tinga aquests segments per mitjanes:

Sabem que les mitjanes d'un triangle mesuren:

$$m = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}, \quad n = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2}, \quad p = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$$

$$\text{Resolent el sistema: } \begin{cases} 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 4m^2 \\ 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 4n^2 \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 4p^2 \end{cases}$$

$$a^2 = \frac{4(2n^2 + 2p^2 - m^2)}{9}, \quad b^2 = \frac{4(2m^2 + 2p^2 - n^2)}{9}, \quad c^2 = \frac{4(2m^2 + 2n^2 - p^2)}{9}$$

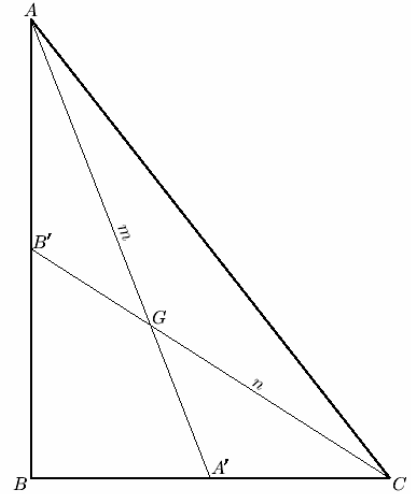
Notem que el triangle $\triangle ABC$ té per costats $\frac{4}{3}$ de les mitjanes del triangle de costats m, n, p . Per tant s'acompleix: $a < b+c$, $b < a+c$, $c < a+b$.

b) En la demostració de l'apartat a) hem calculat els costats del triangle $\triangle ABC$.

4.- Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$ $\angle ABC = 90^\circ$.
 Siguen m i n les longituds de les mitjanes respectives als vèrtexs A, C.

a) Proveu que $\frac{1}{2} \leq \frac{m}{n} \leq 2$.

b) Si α és l'angle format per aquestes dues mitjanes, quin és el valor màxim que pot assolir α ?



Solució:

a)

Per les propietats de les mitjanes:

$$m^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4} \quad n^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$

Dividim ambdues expressions:

$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores: $c^2 = b^2 - a^2$

$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{4b^2 - 3a^2}{b^2 + 3a^2}$$

$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{4b^2 - 3a^2}{b^2 + 3a^2} \leq \frac{4b^2}{b^2} \leq 4$$

Per se b la hipotenusa del triangle $b > a$

$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{4b^2 - 3a^2}{b^2 + 3a^2} \geq \frac{4b^2 - 3b^2}{b^2 + 3b^2} = \frac{b^2}{4b^2} = \frac{1}{4}$$

Calculant l'arrel quadrada:

$$\sqrt{\frac{1}{4}} \leq \sqrt{\frac{m^2}{n^2}} \leq \sqrt{4}$$

$$\text{Aleshores: } \frac{1}{2} \leq \frac{m}{n} \leq 2.$$

b)

Siga $\alpha = \angle A'GC$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle A'GC$

$$\frac{\frac{a}{2}}{\sin \alpha} = \frac{\frac{1}{3}m}{\sin \angle A'CG}, \quad \sin \angle A'CG = \frac{\frac{c}{2}}{n}$$

$$\text{Aleshores: } \sin \alpha = \frac{3ac}{4nm} \quad (*)$$

Per ser el triangle $\triangle ABC$ rectangle $c \leq m$, $a \leq n$

$$\text{Aleshores: } \sin \alpha \leq \frac{3}{4} \quad 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$$

$$\text{Aleshores, } \alpha \leq \arcsin \frac{3}{4} \approx 48^\circ 35' 25''$$

Aquesta és una bona fita de l'angle α .

Vegem que encara ho podem afitar més:

Per la qüestió 1 sabem que $m^2 = \frac{4b^2 - 3a^2}{4}$, $n^2 = \frac{b^2 + a^2}{4}$

Aïllant les incògnites a, b

$$a^2 = \frac{4(4n^2 - m^2)}{15} \quad b^2 = \frac{4(3n^2 + 3m^2)}{15}$$

De l'apartat (*) $\sin \alpha = \frac{3ac}{4nm}$. Aleshores, $\sin^2 \alpha = \frac{3^2 a^2 c^2}{4^2 n^2 m^2}$

Substituint a, b:

$$\sin^2 \alpha = \frac{3^2}{15^2} \left(17 - 4 \left(\left(\frac{m}{n} \right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{m}{n} \right)^2} \right) \right)$$

La funció $f(x) = 17 - 4 \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right)$ un únic màxim en l'interval $\left[\frac{1}{2}, 2 \right]$ quan $x = 1$

Aleshores, $\sin^2 \alpha$ és màxim quan $\frac{m}{n} = 1$ i el valor màxim és:

$$\sin^2 \alpha \leq \frac{3^2}{15^2} (17 - 4(1 + 1)) = \frac{9}{5^2} = \left(\frac{3}{5} \right)^2$$

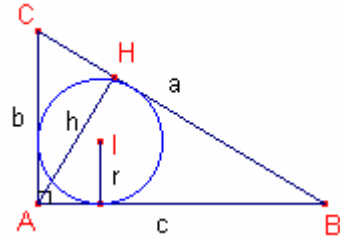
Aleshores, $\sin \alpha \leq \frac{3}{5} \quad \alpha \leq 36^\circ 52' 11.63''$

5.- En qualsevol triangle rectangle s'acompleix la següent desigualtat:

$0'4 < \frac{r}{h} < 0'5$ on r és el radi de la circumferència inscrita i h és l'altura sobre la hipotenusa.

Solució:

Considerem el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$.
Siga r el radi de la circumferència inscrita. Siga h l'altura sobre la hipotenusa.



L'àrea del triangle $\triangle ABC$ és:

$$S = r \frac{a+b+c}{2} \quad S = \frac{ah}{2}$$

Igualant les àrees:

$$r \frac{a+b+c}{2} = \frac{ah}{2}, \text{ aleshores, } \frac{r}{h} = \frac{a}{a+b+c}.$$

Dividint per a :

$$\frac{r}{h} = \frac{1}{1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}} = \frac{1}{1 + \sin B + \cos B}$$

Provem que $\sin B + \cos B < 1'5$, $\sin B + \cos B > 1$.

$$\sin B + \cos B = \sin B + \sin(90^\circ - B) = 2 \sin 45^\circ \cos(B - 45^\circ) = \sqrt{2} \cos(B - 45^\circ) \leq \sqrt{2} < 1'5$$

Suposem que $\sin B + \cos B \leq 1$ $0^\circ < B < 90^\circ$.

$$(\sin B + \cos B)^2 \leq 1$$

$\sin^2 B + \cos^2 B + 2 \sin B \cos B \leq 1$, aleshores, $\sin 2B \leq 0$, $0^\circ < 2B < 180^\circ$ la qual cosa és un absurd. Per tant, $\sin B + \cos B > 1$.

$$\frac{r}{h} = \frac{1}{1 + \sin B + \cos B} < \frac{1}{1+1} = 0'5 \quad \frac{r}{h} = \frac{1}{1 + \sin B + \cos B} > \frac{1}{1+1'5} = 0'4.$$

Aleshores, $0'4 < \frac{r}{h} < 0'5$.

6.- En una circumferència està inscrit un triangle isòsceles $\triangle ABC$ $\overline{AB} = \overline{BC}$.

Siga un punt K qualsevol de l'arc \widehat{AC} .

Aleshores, $\overline{AK} \cdot \overline{KC} = \overline{BK}^2 - \overline{AB}^2$.

Solució:

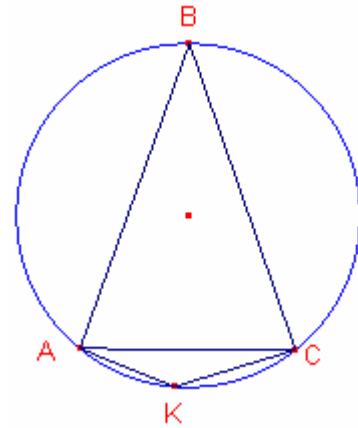
un triangle isòsceles $\triangle ABC$ $\overline{AB} = \overline{BC}$ inscrit en una circumferència.

Siga $\alpha = \angle BAK$, aleshores, $\angle BCK = 180^\circ - \alpha$

Notem que $\angle AKB = \hat{C}$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABK$:

$$\frac{\overline{BK}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\sin C}, \text{ aleshores, } \sin \alpha = \frac{\overline{BK} \sin C}{\overline{AB}} \quad (1)$$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABK$:

$$\frac{\overline{AK}}{\sin(180^\circ - (\alpha + C))} = \frac{\overline{AB}}{\sin C}, \text{ per tant, } \frac{\overline{AK}}{\sin(\alpha + C)} = \frac{\overline{AB}}{\sin C} \quad (2)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle BCK$:

$$\frac{\overline{KC}}{\sin(\alpha - C)} = \frac{\overline{AB}}{\sin C} \quad (3)$$

Multiplicant (2) i (3):

$$\frac{\overline{AK} \cdot \overline{KC}}{\sin(\alpha + C) \sin(\alpha - C)} = \frac{\overline{AB}^2}{\sin^2 C}$$

Transformant productes de sinus en sumes:

$$\frac{\overline{AK} \cdot \overline{KC}}{\frac{-1}{2}(\cos(2\alpha) - \cos(2C))} = \frac{\overline{AB}^2}{\sin^2 C}$$

$$\frac{\overline{AK} \cdot \overline{KC}}{\sin^2 \alpha - \sin^2 C} = \frac{\overline{AB}^2}{\sin^2 C} \quad (4)$$

Substituint (1) en (4):

$$\frac{\overline{AK} \cdot \overline{KC}}{\left(\frac{\overline{BK} \sin C}{\overline{AB}}\right)^2 - \sin^2 C} = \frac{\overline{AB}^2}{\sin^2 C}$$

Simplificant:

$$\overline{AK} \cdot \overline{KC} = \overline{BK}^2 - \overline{AB}^2.$$

7.- Demostreu que en un triangle rectangle $\frac{r}{R} \leq \sqrt{2} - 1$ on r és el radi de la circumferència inscrita i R el radi de la circumferència circumscrita.

Demostració:

Considerem el triangle rectangle $\triangle ABC$ $A = 90^\circ$.
Per ser el triangle rectangle el circumcentre és el punt mig de la hipotenusa.

$$\text{Aleshores, } R = \frac{a}{2} \quad (1).$$

Siguen M, N, P els punts de tangència de la circumferència inscrita i el triangle.

Aleshores, $r = \overline{AP} = p - a$ on p és el semiperímetre.

$$r = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle ABC$.
 $b = a \cdot \sin B$, $c = a \cdot \cos B$.

$$\text{Per tant, } r = \frac{a(\sin B + \cos B - 1)}{2} \quad (2)$$

Dividint (2) entre (1):

$$\frac{r}{R} = \sin B + \cos B - 1.$$

Considerem la funció $f(B) = \sin B + \cos B - 1$ on $B \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Calculem el màxim de la funció:

$$f'(B) = \cos B - \sin B$$

$$f'(B) = 0$$

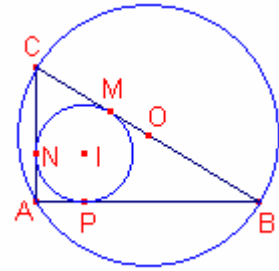
$$\cos B - \sin B = 0, \text{ aleshores, } B = \frac{\pi}{4}.$$

$$f''(B) = -\sin B - \cos B.$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} < 0.$$

Aleshores, $B = \frac{\pi}{4}$ és un màxim de la funció $f(B)$.

$$\text{Per tant } \frac{r}{R} = f(B) \leq f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - 1$$



Nota: Aquesta fita del quocient dels radis és millor que la que dona el teorema d'Euler dels radis de les circumferències inscrita i circumscrita que era $\frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}$ per a qualsevol triangle.

8.- Considerem el triangle $\triangle ABC$, siga r el radi de la circumferència inscrita.
 Siguen h_1, h_2, h_3 les 3 altures del triangle.

$$\text{Aleshores, } \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}.$$

Solució:

Siguen h_1, h_2, h_3 les altures referides als costats, a, b, c , respectivament.

Calculem l'àrea, del triangle $\triangle ABC$.

$$S = \frac{a \cdot h_1}{2}, \quad S = \frac{b \cdot h_2}{2}, \quad S = \frac{c \cdot h_3}{2}$$

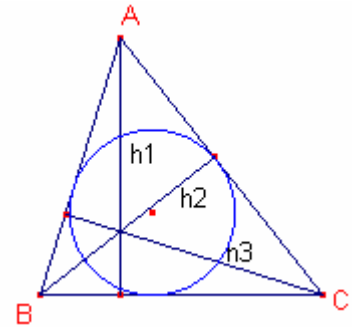
$S = r \cdot p$, on r és el radi de la circumferència inscrita i p el semiperímetre del triangle

$\triangle ABC$.

Igualant les àrees tenim que:

$$h_1 = \frac{2r \cdot p}{a}, \quad h_2 = \frac{2r \cdot p}{b}, \quad h_3 = \frac{2r \cdot p}{c}.$$

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{a}{2r \cdot p} + \frac{b}{2r \cdot p} + \frac{c}{2r \cdot p} = \frac{a+b+c}{2r \cdot p} = \frac{2p}{2r \cdot p} = \frac{1}{r}.$$



9.- Demostreu que si dues mitjanes m_a, m_b d'un triangle $\triangle ABC$ són perpendiculars aleshores es té que $m_c^2 = m_a^2 + m_b^2$, on m_c és l'altra mitjana.

Solució 1:

Siga G el baricentre del triangle $\triangle ABC$.

Siguen $m_a = \overline{AD}$, $m_b = \overline{BE}$, $m_c = \overline{CF}$ les tres mitjanes del triangle $\triangle ABC$.

Per la propietat del baricentre $\overline{AG} + \overline{BG} + \overline{CG} = \vec{0}$

o bé, $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \vec{0}$.

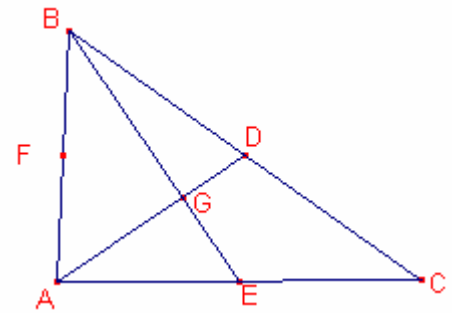
Si les mitjanes m_a, m_b són perpendiculars, aleshores,

$$\overline{AD} \cdot \overline{BE} = 0$$

$$m_c^2 = \|\overline{CF}\|^2 = \overline{CF} \cdot \overline{CF} = (-\overline{AD} - \overline{BE}) \cdot (-\overline{AD} - \overline{BE}) =$$

$$= \overline{AD} \cdot \overline{AD} + \overline{BE} \cdot \overline{BE} + 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BE} = \|\overline{AD}\|^2 + \|\overline{BE}\|^2 = m_a^2 + m_b^2.$$

És a dir el quadrat de la tercera mitjana és igual a la suma del quadrat de les mitjanes que són perpendiculars.



Solució 2:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}, m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}, m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Si les mitjanes m_a, m_b són perpendiculars, aplicant el teorema de Pitàgores al triangle

$$\triangle AGB, \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 = c^2, \text{ aleshores, } c^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2) \quad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles $\triangle GDB, \triangle GEA$:

$$\left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{1}{3}m_a\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\text{Sumant i simplificant, } a^2 + b^2 = \frac{20}{9}(m_a^2 + m_b^2) \quad (2)$$

Substituint (1) i (2) en l'expressió de la mitjana,

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} = \frac{2\left(\frac{20}{9}(m_a^2 + m_b^2)\right) - \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2)}{4} = m_a^2 + m_b^2$$

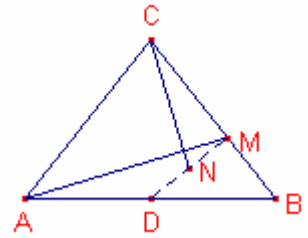
10.- Des del punt mig de la base \overline{AB} del triangle isòsceles $\triangle ABC$ s'ha traçat una perpendicular al costat \overline{BC} que talla el costat en el punt M. Siga N el punt mig del segment \overline{DM} . Demostreu que els segments \overline{CN} , \overline{AM} són perpendiculars.

Solució 1:

Considerem el triangle $\triangle ABC$ amb les següents coordenades cartesianes: $A(-c,0)$, $B(c,0)$, $C(0,a)$. Aleshores, $D(0,0)$.

La recta r que passa pels punts B, C té equació: $r \equiv y = \frac{-a}{c}(x - c)$.

La recta s que passa pel punt D i és perpendicular al costat \overline{BC} té per equació: $s \equiv y = \frac{c}{a}x$. El punt M és la intersecció de les rectes r, s:



$$\text{Aleshores, } M \left(\frac{a^2c}{a^2 + c^2}, \frac{ac^2}{a^2 + c^2} \right).$$

$$N \text{ és el punt mig del segment } \overline{DM}. \text{ Aleshores, } N \left(\frac{a^2c}{2(a^2 + c^2)}, \frac{ac^2}{2(a^2 + c^2)} \right).$$

Calculem les components dels vectors \vec{CN} , \vec{AM} .

$$\vec{CN} = \left(\frac{a^2c}{2(a^2 + c^2)}, \frac{ac^2}{2(a^2 + c^2)} - a \right) \quad \vec{AM} = \left(\frac{a^2c}{a^2 + c^2} + c, \frac{ac^2}{a^2 + c^2} \right)$$

Calculem el producte escalar dels vectors \vec{CN} , \vec{AM} :

$$\vec{CN} \cdot \vec{AM} = \frac{a^2c}{2(a^2 + c^2)} \left(\frac{a^2c + a^2c + c^3}{a^2 + c^2} \right) + \left(\frac{ac^2 - 2a^3 - 2ac^2}{2(a^2 + c^2)} \right) \frac{ac^2}{a^2 + c^2} = 0$$

Aleshores, \vec{CN} , \vec{AM} són perpendiculars.

Solució 2:

Siga $\overline{AB} = 2a$, $\overline{CA} = \overline{CB} = b$, $\angle CAB = \alpha$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\triangle CDB$, $\overline{CD} = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Els triangles $\triangle CDB, \triangle DBM$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DM}}. \text{ Per tant, } \overline{DM} = \frac{a\sqrt{b^2 - a^2}}{b}, \quad \overline{NM} = \frac{\overline{DM}}{2} = \frac{a\sqrt{b^2 - a^2}}{2b}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\triangle BMD$:

$$\overline{BM} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2(b^2 - a^2)}{b^2}} = \frac{a^2}{b}, \quad \overline{CM} = b - \frac{a^2}{b} = \frac{b^2 - a^2}{b}$$

$\vec{CN} = \vec{CM} + \vec{MN}$, $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM}$. Efectuem el producte escalar i comprovem que és zero.

$$\begin{aligned} \vec{CN} \cdot \vec{AM} &= \vec{CM} \cdot \vec{MN} + \vec{AB} \cdot \vec{BM} + \vec{MN} \cdot \vec{AB} + \vec{MN} \cdot \vec{BM} = \vec{CM} \cdot \vec{MN} + \vec{AB} \cdot \vec{BM} + \vec{MN} \cdot \vec{AB} = \\ &= \|\vec{CM}\| \cdot \|\vec{MN}\| \cos \alpha + \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{BM}\| \cos 180^\circ + \|\vec{MN}\| \cdot \|\vec{AB}\| \cos(90^\circ + \alpha) = \\ &= \frac{b^2 - a^2}{b} \cdot 2a \cdot \frac{a}{b} - \frac{b^2 - a^2}{b} \cdot \frac{a^2}{b} + \frac{a}{2b} \sqrt{b^2 - a^2} 2a \left(\frac{-\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \right) = 0 \end{aligned}$$

Aleshores, \vec{CN} , \vec{AM} són perpendiculars.

11.- Demostreu que la suma dels catets d'un triangle rectangle és igual o menor que la diagonal del quadrat construït sobre la hipotenusa.

Solució:

Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$.

La diagonal del quadrat construït sobre la hipotenusa és (aplicant el teorema de Pitàgores) $\sqrt{2}a$.

$$(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = a^2 + 2bc.$$

Provem que $2bc < a^2$

Considerem la funció: $f(b,c) = 2bc$

Com que $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$f(b) = 2b\sqrt{a^2 - b^2}$. Determinem el màxim de la funció.

$$f'(b) = \frac{(2a^2b - 4b^3)}{\sqrt{a^2b^2 - b^4}} = \frac{2(a^2 - 2b^2)}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

$$f'(b) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$f''(b) = \frac{-2b^3}{\sqrt{(a^2 - b^2)^3}}.$$

$$f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0.$$

Per tant, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ és un màxim de la funció $f(b)$.

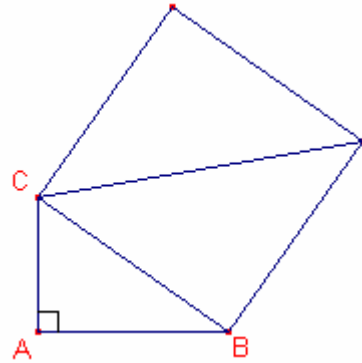
$$\text{Aleshores, } f(b) \leq f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}a^2} = a^2.$$

Per tant, $2bc < a^2$.

$$(b+c)^2 = a^2 + 2bc \leq a^2 + a^2 = 2a^2.$$

Calculant l'arrel quadrada:

$b+c \leq \sqrt{2}a$. Aleshores, la suma dels catets d'un triangle rectangle és igual o menor que la diagonal del quadrat construït sobre la hipotenusa.



12.- En l'interior d'un triangle equilàter $\triangle ABC$ es troba un punt P tal que $\overline{PA} = 6\text{cm}$, $\overline{PB} = 8\text{cm}$, $\overline{PC} = 10\text{cm}$. Determineu el costat del triangle i la seua àrea.

Solució 1:

Siga P_1 el punt simètric del P respecte del costat \overline{AB} .

Siga P_2 el punt simètric de P respecte del costat \overline{BC} .

Siga P_3 el punt simètric de P respecte del costat \overline{AC} .

Aleshores, $\overline{AP_1} = \overline{AP_3} = 6$, $\angle P_1AP_3 = 120^\circ$.

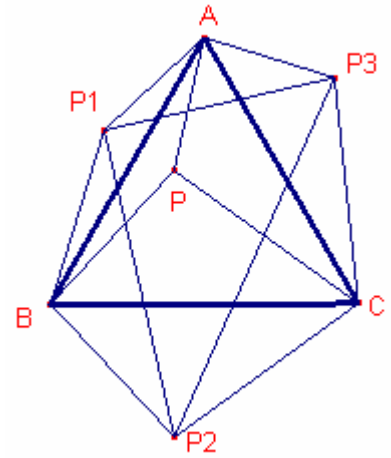
Aplicant el teorema del cosinus al triangle P_1AP_3 :

$$\overline{P_1P_3}^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ = 108, \text{ Aleshores,}$$

$$\overline{P_1P_3} = 6\sqrt{3}.$$

$$\text{Anàlogament, } \overline{P_2P_3} = 10\sqrt{3}, \quad \overline{P_1P_2} = 8\sqrt{3}.$$

Notem que el triangle $P_1P_2P_3$ és rectangle.



L'àrea del triangle $\triangle ABC$ és la meitat de la suma de les àrees dels triangles $P_1P_2P_3$,

P_1AP_3 , P_1BP_2 , P_2CP_3 .

$$S_{P_1P_2P_3} = \frac{6\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 72$$

$$S_{P_1AP_3} = \frac{6 \cdot 6 \cdot \sin 120^\circ}{2} = 9\sqrt{3}$$

$$S_{P_1BP_2} = \frac{8 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ}{2} = 16\sqrt{3}$$

$$S_{P_2CP_3} = \frac{10 \cdot 10 \cdot \sin 120^\circ}{2} = 25\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{S_{P_1P_2P_3} + S_{P_1AP_3} + S_{P_1BP_2} + S_{P_2CP_3}}{2} = \frac{72 + 9\sqrt{3} + 16\sqrt{3} + 25\sqrt{3}}{2} = 36 + 25\sqrt{3}.$$

L'àrea d'un triangle equilàter és $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ on a és el costat del triangle.

$$\text{Aleshores, } \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 36 + 25\sqrt{3}.$$

$$\text{Per tant el costat del triangle equilàter és } a = \sqrt{100 + 48\sqrt{3}}.$$

Solució 2:

Siga $a = \overline{AB}$ el costat del triangle $\triangle ABC$.
Considerem els angles $\alpha = \angle APB$, $\beta = \angle APC$.

Aplicant el teorema del cosinus als triangle $\triangle ABP$, $\triangle ACP$,

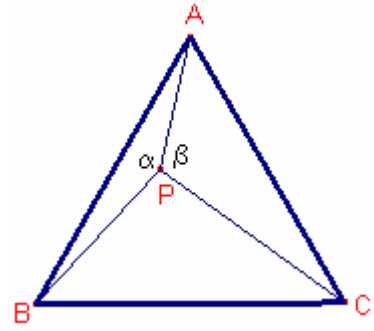
$\triangle BCP$:

$$a^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \alpha,$$

$$\text{aleshores, } \cos \alpha = \frac{100 - a^2}{96}, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{100 - a^2}{96}\right)^2}. \quad (1)$$

$$a^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos \beta,$$

$$\text{aleshores, } \cos \beta = \frac{136 - a^2}{120}, \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{136 - a^2}{120}\right)^2}. \quad (2)$$



$$a^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos(360^\circ - (\alpha + \beta))$$

Simplificant:

$$a^2 = 164 - 160 \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

$$a^2 = 164 - 160(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \quad (3)$$

Substituint les expressions (1) i (2) en l'expressió (3):

$$a^2 = 164 - 160 \left(\frac{100 - a^2}{96} \frac{136 - a^2}{120} - \sqrt{1 - \left(\frac{100 - a^2}{96}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{136 - a^2}{120}\right)^2} \right)$$

Simplificant:

$$a^2(a^4 - 200a^2 + 3088) = 0$$

Aleshores,

$$a^2 = \begin{cases} 100 + 48\sqrt{3} \\ 100 - 48\sqrt{3} \end{cases} \quad \text{la segona solució no és vàlida ja que el punt P estaria fora del}$$

triangle.

$$a = \sqrt{100 + 48\sqrt{3}}$$

L'àrea del triangle és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} (100 + 48\sqrt{3}) = 36 + 25\sqrt{3}.$$

13.- En el triangle $\triangle ABC$ sabem que $\overline{AC} : \overline{BC} = 1 : 3$, $\angle ACB = \arctg \frac{\sqrt{5}}{2}$.

En el costat \overline{AC} agafem un punt D tal que $\overline{AC} = \overline{CD}$.

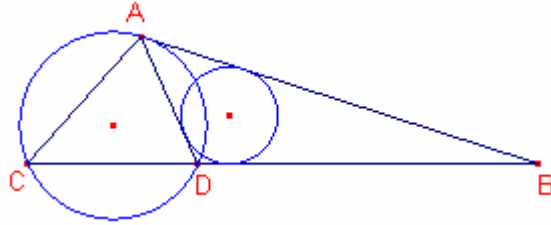
Determineu la raó entre l'àrea del cercle circumscrit al triangle $\triangle ACD$ i l'àrea del cercle inscrit al triangle $\triangle ABD$.

Solució:

Si $C = \arctg \frac{\sqrt{5}}{2}$, aleshores,

$$\sin C = \frac{\sqrt{5}}{3}, \cos C = \frac{2}{3}.$$

Siga $\overline{AC} = \overline{CD} = x$, $\overline{BC} = 3x$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ACD$:

$$\overline{AD}^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos C. \text{ Aleshores, } \overline{AD} = \frac{\sqrt{6}}{3}x.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$:

$$\overline{AB}^2 = x^2 + (3x)^2 - 2 \cdot 3x^2 \cos C. \text{ Aleshores, } \overline{AB} = \sqrt{6}x.$$

Siga $\alpha = \angle CDA$. Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ACD$:

$$\frac{\overline{AD}}{\sin C} = \frac{\overline{AC}}{\sin \alpha} = 2R \text{ on } R \text{ és el radi de la circumferència circumscrita a } \triangle ACD.$$

$$\text{Aleshores, } \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}\sqrt{6}}{6}, \quad R = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}x.$$

Calculem l'àrea del triangle $\triangle ABD$:

$$S_{ABD} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{DB} \cdot \sin(180 - \alpha)}{2} = \frac{\sqrt{5}}{3}x^2$$

$S_{ABD} = r \cdot p$ on r és el radi de la circumferència inscrita al triangle $\triangle ABD$ i p el semiperímetre. Igualant les àrees:

$$\frac{\sqrt{5}}{3}x^2 = r \left(\frac{\sqrt{6}x + 2x + \frac{\sqrt{6}}{3}x}{2} \right), \text{ aïllant } r:$$

$$r = \frac{\sqrt{5}}{3 + 2\sqrt{6}}x.$$

La raó entre l'àrea del cercle circumscrit al triangle $\triangle ACD$ i l'àrea del cercle inscrit al triangle $\triangle ABD$ és igual al quocient dels quadrats dels radis:

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}x \right)^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{3 + 2\sqrt{6}}x \right)^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{33 + 12\sqrt{6}}{25}.$$

14.- Siga el triangle $\triangle ABC$ rectangle $A = 90^\circ$.

Pel punt O del catet \overline{AB} tracem la perpendicular \overline{OH} a la hipotenusa \overline{BC} .

Siga D la intersecció de la recta OH i la recta AC .

Siga E la intersecció de les rectes DB i OC .

Determineu el lloc geomètric del punt E al variar O sobre el catet \overline{AB} .

Solució:

Siga $\alpha = \angle AOC$, $\beta = \angle OCB$, $\gamma = \angle HDB$.

Demostrem que $\beta = \gamma$.

Considerem el rectangle $\triangle OHC$, $\text{tg}\beta = \frac{\overline{OH}}{\overline{CH}}$

Considerem el rectangle $\triangle DHB$, $\text{tg}\gamma = \frac{\overline{HB}}{\overline{DH}}$

$$\frac{\text{tg}\beta}{\text{tg}\gamma} = \frac{\frac{\overline{OH}}{\overline{CH}}}{\frac{\overline{HB}}{\overline{DH}}} = \frac{\overline{OH}}{\overline{HB}} \cdot \frac{\overline{DH}}{\overline{CH}} = \text{tg}B \cdot \text{ctg}B = 1$$

Aleshores, $\text{tg}\beta = \text{tg}\gamma$, per tant, $\beta = \gamma$.

Els triangles $\triangle CEB$, $\triangle DBH$ són semblants, per tant $\triangle CEB$ és rectangle.

Siga M el punt mig de la hipotenusa \overline{BC} .

Per la propietat de la mitjana d'un triangle rectangle (la mitjana sobre la hipotenusa mesura la meitat de la hipotenusa):

$\overline{ME} = \overline{MB}$, el segment \overline{ME} és sempre constatat.

Aleshores el lloc geomètric del punt E al variar O sobre el catet \overline{AB} és l'arc de circumferència de centre M i radi $\frac{\overline{AB}}{2}$.

