Problemes Geometria 30

1.- Un trapezi amb angles aguts α, β està circumscrit a una circumferència.

Determineu la raó de proporcionalitat entre el perímetre del trapezi i de la longitud de la circumferència.

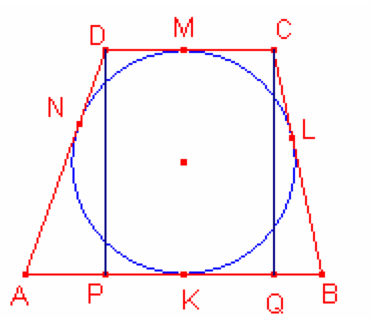
Gúsiev 182.

Solució:

Siga el trapezi ABCD de costats paral·lels $\overline{AB}$, $\overline{CD}$. Siga $\angle DAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$.

Siga La circumferència inscrita al trapezi de radi r.

Siguen K, L, M, N els punts de tangència de la circumferència inscrita al trapezi i el trapezi.



$\overline{KM} = 2r$.

$\overline{AK} = \overline{AN}$, $\overline{BK} = \overline{BL}$, $\overline{CL} = \overline{CM}$, $\overline{DM} = \overline{DN}$.

Aleshores, $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$.

El perímetre del trapezi és igual a $p = 2\left(\overline{BC} + \overline{AD}\right)$.

Siga P la projecció de D sobre el costat $\overline{AB}$.

Siga Q la projecció de C sobre el costat $\overline{AB}$.

$\overline{PD} = \overline{QC} = 2r$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APD}$:

$$\overline{AD} = \frac{1}{\sin\alpha} 2r.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BQC}$:

$$\overline{BC} = \frac{1}{\sin\beta} 2r.$$

$$p = 2\left(\overline{BC} + \overline{AD}\right) = 4r\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right).$$

La longitud de la circumferència és:

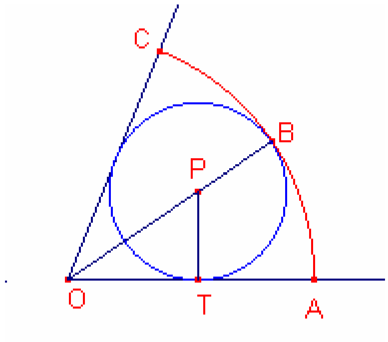
$l = 2\pi r$.

La raó de proporcionalitat entre el perímetre del trapezi i de la longitud de la circumferència és:

$$\frac{p}{l} = \frac{4r\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right)}{2\pi r} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right).$$

2.- En un sector circular d'angle 2α hi ha inscrita una circumferència.
Determineu la raó de proporcionalitat entre els radis de la circumferència i del sector.
Gúsiev 197.

Solució:
Siga el sector de centre O i arc ABC o B és el punt mig de l'arc.
Siga $R=\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ el radi del sector.
Siga $2\alpha=\angle AOC$, $\alpha=\angle AOB$.
Siga la circumferència inscrita en el sector de centre P.
B és el punt de tangència de la circumferència i l'arc.
Siga T el punt de tangència de la circumferència i el segment $\overline{OA}$.
Siga $\overline{PT}=r$ el radi de la circumferència inscrita al sector
$\overline{OP}=R-r$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTP}$:

$\sin\alpha=\dfrac{r}{R-r}$.

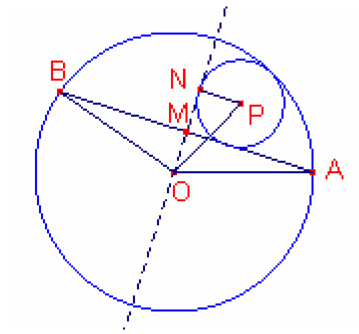
$\dfrac{\frac{r}{R}}{1-\frac{r}{R}}=\sin\alpha$. Resolent l'equació en $\dfrac{r}{R}$:

$\dfrac{r}{R}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$.

3.- En una circumferència de radi R i centre O s'han dibuixat els radis $\overline{OA}$, $\overline{OB}$
$\alpha = \angle AOB$.

Determineu el radi de la circumferència tangent a l'arc $\overset{\frown}{AB}$ a la corda $\overline{AB}$ i a la bisectriu de l'angle $\alpha = \angle AOB$.
Gúsiev 205.

Solució:
Siga M el punt mig de la corda $\overline{AB}$



Siga la circumferència tangent a l'arc $\overset{\frown}{AB}$ a la corda $\overline{AB}$ i a la bisectriu de l'angle $\alpha = \angle AOB$. Siga r el seu radi i P els seu centre.
Siga N el punt de tangència de la circumferència i la recta bisectriu.
$\overline{MN} = \overline{PN} = r$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMA}$:

$\overline{OM} = R \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$.

$\overline{ON} = \overline{OM} + \overline{MN} = r + R \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$.

$\overline{OP} = R - r$.

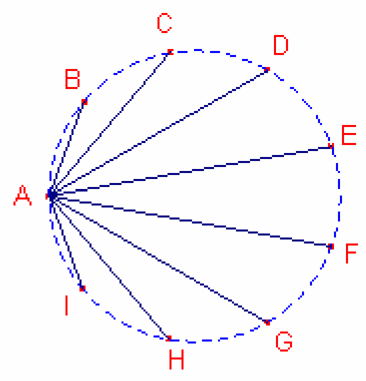
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ONP}$:

$(R-r)^2 = r^2 + \left(r + R \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$$r = \left(-1 - \cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2\left(1 + \cos\frac{\alpha}{2}\right)}\right)R .$$

4.- Nou persones estan situades a igual distància en una circumferència de 60m de radi. Vuit d'elles s'han de reunir amb la novena seguint el camí més curt. Determineu la suma de les distàncies recorregudes per les vuit persones.
Garcia Ardura2, problema 814.

Solució:
Les nou persones per estar a igual distància, estan en els vèrtexs d'un polígon regular de nou costats.
Siga $R = 60$ radi de la circumferència.
Siga el polígon ABCDEFGHI i suposem que la persona fixa està en el vèrtex A.



La suma de distàncies recorregudes és:
$s = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{AE} + \overline{AF} + \overline{AG} + \overline{AH} + \overline{AI}$.
Com que $\overline{AB} = \overline{AI}$, $\overline{AC} = \overline{AH}$, $\overline{AD} = \overline{AG}$, $\overline{AE} = \overline{AF}$.
Aleshores, $s = 2\left(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{AE}\right)$.
$\angle ACB = 20º$, $\angle ADC = 40º$, $\angle AEF = 60º$, $\angle ADE = 100º$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AB} = 2R \cdot \sin 20º$.

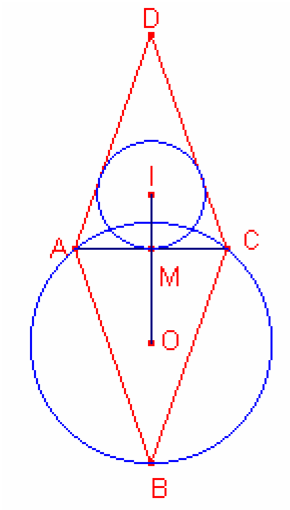
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACD}$:
$\overline{AC} = 2R \cdot \sin 40º$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ADE}$:
$\overline{AD} = 2R \cdot \sin 60º$, $\overline{AE} = 2R \cdot \sin 100º$

$$
\begin{aligned}
s = 2\left(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{AE}\right) &= 4R(\sin 20º + \sin 40º + \sin 60º + \sin 100º) = \\
&= 4R(2\sin 30º \cdot \cos 10º + 2\sin 80º \cos 20º) = \\
&= 4R(2\sin 30º \cdot \cos 10º + 2\sin 70º \cos 10º) = \\
&= 8R \cdot \cos 10º (\sin 30º + \sin 70º) = \\
&= 8R \cdot \cos 10º (2\sin 50º \cdot \cos 20º) = \\
&= 16R \cdot \cos 10º \cdot \cos 20º \cdot \cos 40º
\end{aligned}
$$

$s = 16 \cdot 60 \cdot \cos 10º \cdot \cos 20º \cdot \cos 40º \approx 680'55m$.

5.- Un rombe de 12 cm de costat la seua diagonal menor mesura 8cm i divideix el rombe en dos triangles. En un triangle s'ha dibuixat la circumferència inscrita i en l'altre la circumferència circumscrita.
Determineu la distància entre els centres de les dues circumferències.
Garcia Ardura2, problema 813.



Solució:

Siga el rombe ABCD $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{AD}=12$.

Siga $\overline{AC}=8$ la diagonal menor.

Siga M el punt mig de la diagonal $\overline{AC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMD}$:

$\overline{DM}=\sqrt{12^2-4^2}=8\sqrt{2}$.

Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ACD}$:

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és:

$$S_{ACD}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{DM}}{2}=\frac{\overline{AC}+\overline{AD}+\overline{CD}}{2}r.$$

$\frac{8\cdot 8\sqrt{2}}{2}=\frac{8+12+12}{2}r$. Resolent l'equació:

$r=\overline{IM}=2\sqrt{2}$.

Siga R el radi de la circumferència circumscrita al triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$:

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és:

$$S_{ABC}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{DM}}{2}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{CD}}{4R}.$$

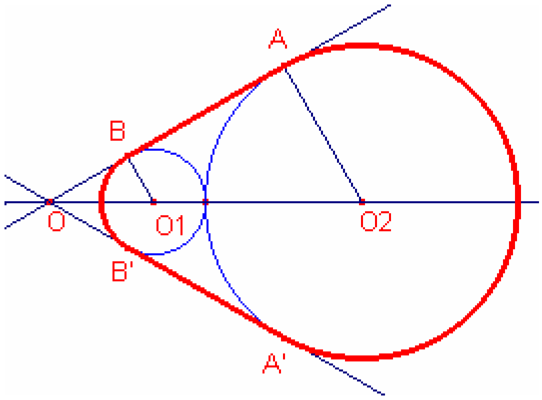
$\frac{8\cdot 8\sqrt{2}}{2}=\frac{8\cdot 12\cdot 12}{4R}$. Resolent l'equació:

$R=\overline{OB}=\frac{9}{2}\sqrt{2}$.

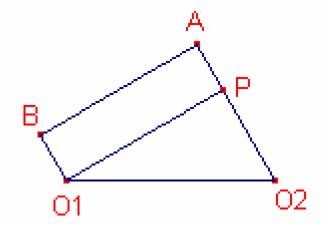
$\overline{OM}=\overline{BM}-R=8\sqrt{2}-\frac{9}{2}\sqrt{2}=\frac{7}{2}\sqrt{2}$.

$\overline{IO}=\overline{IM}+\overline{OM}=2\sqrt{2}+\frac{7}{2}\sqrt{2}=\frac{11}{2}\sqrt{2}\approx 7'78\text{cm}$.

6.- Dues circumferències són tangents exteriors i els radis són r, 3r, respectivament. Determineu el perímetre de la figura formada per els segments tangents i els arcs externs de les dues circumferències.
Gúsiev 120.



Solució:
Siguen les circumferències de centres O_1, O_2 i radis r, 3r, respectivament.
Siguen t_1, t_2 les rectes tangents a les circumferències, les quals s'intersecten en el punt O.
Siguem A, B els punts de tangència de les circumferències amb la recta t_1
Siguem A', B' els punts de tangència de les circumferències amb la recta t_2
Siga $\alpha = \angle AOO_2$.



Siga P la projecció de O_1 sobre $\overline{AO_2}$.
$\overline{O_1O_2} = 4r$, $\overline{PO_2} = 2r$, $\overline{AB} = \overline{PO_1}$.
El triangle $\overset{\Delta}{O_1PO_2}$ és rectangle aplicant el teorema de Pitàgores:
$\overline{AB} = \sqrt{(4r)^2 - (2r)^2} = 2r\sqrt{3}$.
$\angle PO_1O_2 = \alpha$. Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{O_1PO_2}$
$\alpha = \arcsin\left(\frac{2r}{4r}\right) = \frac{1}{2}$. Aleshores, $\alpha = 30^\circ$.
$\angle BO_1B' = \angle AO_2A' = 120^\circ$.

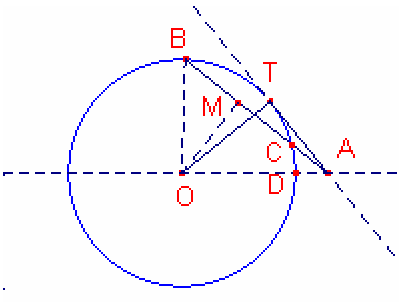
L'arc exterior $\overset{\frown}{BB'}$ mesura 120º, un terç de circumferència de radi r.

L'arc exterior $\overset{\frown}{AA'}$ mesura 240º, dos terços de circumferència de radi 3r.
Aleshores el perímetre del recinte és:

$$2\cdot\overline{AB} + \overset{\frown}{BB'} + \overset{\frown}{AA'} = 2\left(2r\sqrt{3}\right) + \frac{1}{3}(2\pi r) + \frac{2}{3}(2\pi 3r) = \left(4\sqrt{3} + \frac{13\pi}{3}\right)r.$$

7.- Des d'un punt exterior a una circumferència s'ha dibuixat una secant de 48cm i una tangent que mesura $\frac{2}{3}$ de la corda de la secant anterior.
Determineu el radi de la circumferència si la distància del centre a la secant és 24cm.
Gúseiv 121.

Solució:
Siga A en punt exterior de la circumferència de centre O i radi r.
Siga la secant $\overline{AB} = 48$.
Siga C la intersecció de la secant $\overline{AB}$ i la circumferència.
Siga $x = \overline{BC}$.
Siga $\overline{AT} = \frac{2}{3}x$ tangent a la circumferència.



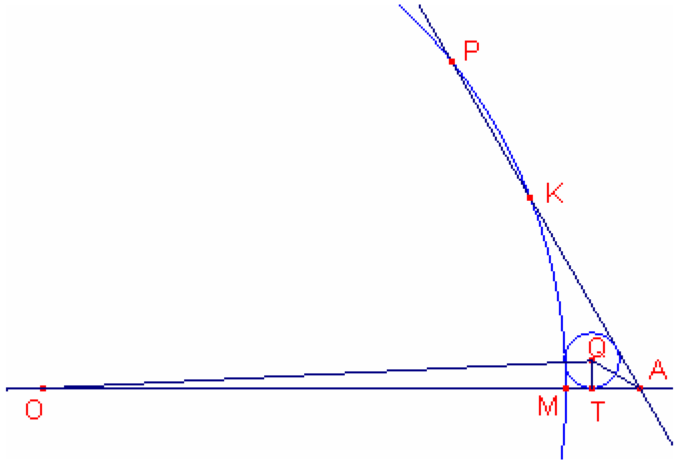
Aplicant la potència de A respecte de la circumferència:
$\overline{AC} \cdot \overline{AB} = \overline{AT}^2$.
$48(48-x) = \left(\frac{2}{3}x\right)^2$. Resolent l'equació:
$x = 36$.
Aleshores, $\overline{AT} = 24$
Siga M la projecció de O sobre $\overline{AB}$, $\overline{OM} = 24$.
Siga D la intersecció de la recta OA i la circumferència.
Siga $y = \overline{AD}$, $z = \overline{BM}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAT}$:
$r^2 + 24^2 = (r+y)^2$ (1)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBM}$:
$z^2 + 24^2 = r^2$ (2)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAM}$:
$(48-z)^2 + 24^2 = (r+y)^2$ (3)
Resolent el sistema format per les expressions (1) (2) (3):
$$\begin{cases} r = 30 \\ z = 18 \\ y = 6\sqrt{41} - 30 \end{cases}.$$
Aleshores el radi de la circumferència és 30cm.

8.- Des del punt A allunyat del centre O d'una circumferència de radi r una distància a $a > r$ es traça una semirecta formant 60º amb la recta AO que talla la circumferència en els punts K, P (K entre A i P).
Determineu el radi de la circumferència inscrita en el triangle curvilini MKA on M és el punt intersecció de la recta AO i la circumferència.
Gúsiev 208.



Solució:

El problema té solució quan $\frac{r}{a} \le \sin 60º = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Siga Q el centre de la circumferència que cerquem.

$\overline{OQ} = r + s$ Siga T el punt de tangència de la circumferència i la recta AO.

$\angle MAQ = \frac{60º}{2} = 30º$.

Siga $x = \overline{MT}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTQ}$:

$$(r+s)^2 = (r+x)^2 + s^2 \qquad (1)$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATQ}$

$$\frac{s}{a-(r+x)} = \mathrm{tg}30º = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad (2)$$

Resolent el sistema format per les expressions (1) (2):

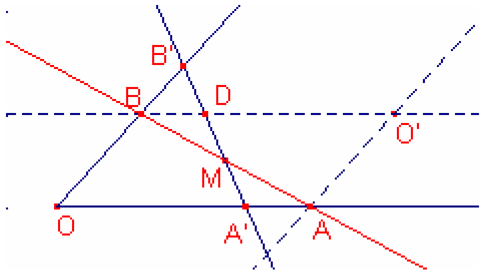
$$\begin{cases} x = \dfrac{-\left(3+\sqrt{3}\right)r - \sqrt{12r^2 + 6ar\sqrt{3}}}{3} \\ s = \dfrac{a\sqrt{3} + r - \sqrt{4r^2 + 2ar\sqrt{3}}}{3} \end{cases}.$$

Aleshores el radi de la circumferència inscrita és:

$$s = \frac{a\sqrt{3} + r - \sqrt{4r^2 + 2ar\sqrt{3}}}{3} \quad \text{quan } r \le a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

9.- Donat dues semirectes d'origen comú O i angle α, $0<\alpha<180^{o}$ i el punt M interior a les dues semirectes, pel punt M tracem una recta que talla les semirectes formant un triangle determineu la semirecta que fa mínima l'àrea del triangle
Gúsiev 333.

Solució 1:
Siga O' el simètric de O respecte del punt M.
Pel punt M tracem dues paral·leles a les semirectes que les tallen en els punts A, B, respectivament.
OAO'B és un paral·lelogram i M és la intersecció de les diagonals.



Demostrem que el triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és el d'àrea mínima.
Siga una recta A'MB'. Aquesta recta talla la recta BO' en el punt D.

$$S_{OA'DB}=\frac{1}{2}S_{\substack{A\\OAO'B}}=S_{OAB}\,.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{BDM}$, $\overset{\Delta}{AA'M}$ són iguals, aleshores:

$$S_{BDM}=S_{AA'M}\,.$$

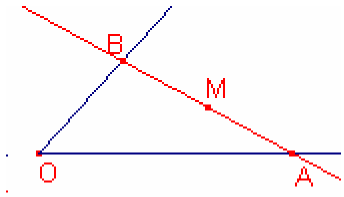
$$S_{OA'B'}=S_{OA'DB}+S_{BDB'}=S_{OAB}+S_{BDB'}\geq S_{OAB}\,.$$

Solució 2. Analítica:
Siga $O(0,0)$, la recta $y=mx$, $M(a,b)$.

Siga $A(c,0)$ i la recta que passa pels punts A, M d'equació, $y=\frac{b}{a-c}(x-c)$.

B és la intersecció d'ambdues rectes. Les seues coordenades són:

$$B\left(\frac{bc}{b+(c-a)m},\frac{bmc}{b+(c-a)m}\right).$$



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és:

$S(c)=\frac{1}{2}\frac{bmc^{2}}{b+(c-a)m}$. Derivem la funció:

$$S'(c)=\frac{1}{2}\frac{2bmc(b+(c-a)m)-m(bmc^{2})}{b+(c-a)m}\,.$$

$$S'(c)=0\,,\ c=\frac{2am-2b}{m}\,.$$

$S''\left(\frac{2am-2b}{m}\right)>0$. Aleshores, $c=\frac{2am-2b}{m}$ és un mínim de l funció àrea.

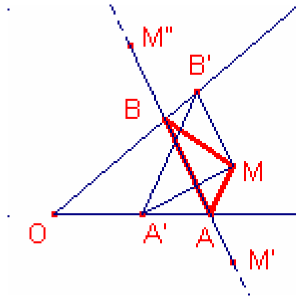
Quan $c=\frac{2am-2b}{m}$, $A\left(\frac{2am-2b}{m},0\right)$, $B\left(\frac{2b}{m},2b\right)$.

L'àrea mínima és:

$$S_{min}=\frac{1}{2}\frac{(2am-2b)2b}{m}=\frac{2b(am-b)}{m}\,.$$

10.- Donat dues semirectes d'origen comú O i angle $\alpha, 0 < \alpha < 90^{o}$ i el punt M interior a les dues semirectes, pel punt M tracem una recta que talla les semirectes en els punts A, B, respectivament. Determineu la recta que fa mínim el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$

Gúsiev 342.



Solució:

Siguen r, i s les dues semirectes d'origen comú O.
Siga M' el simètric de M respecte la semirecta r.
Siga M" el simètric de M respecte la semirecta s.
La recta M'M" talla les semirectes r i s en els punts A i B, respectivament.

Demostrem que el triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ té perímetre mínim.

$\overline{AM} = \overline{AM'}$, $\overline{BM} = \overline{BM''}$. Aleshores el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ és igual a la mesura del segment $\overline{M'M''}$.

Siga A' un punt de la semirecta de r, i B' un punt de la semirecta s.

Vegem que el perímetre de triangle $\overset{\Delta}{A'B'M}$ és major o igual que el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$.

$\overline{A'M} = \overline{A'M'}$, $\overline{B'M} = \overline{B'M''}$

$\overline{A'B'} + \overline{A'M} = \overline{A'B'} + \overline{A'M'} \geq \overline{B'M'}$.

$\overline{A'B'} + \overline{A'M} + \overline{B'M} = \overline{B'M'} + \overline{B'M''} \geq \overline{M'M''}$.

Aleshores, el perímetre de triangle $\overset{\Delta}{A'B'M}$ és major o igual que el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$.