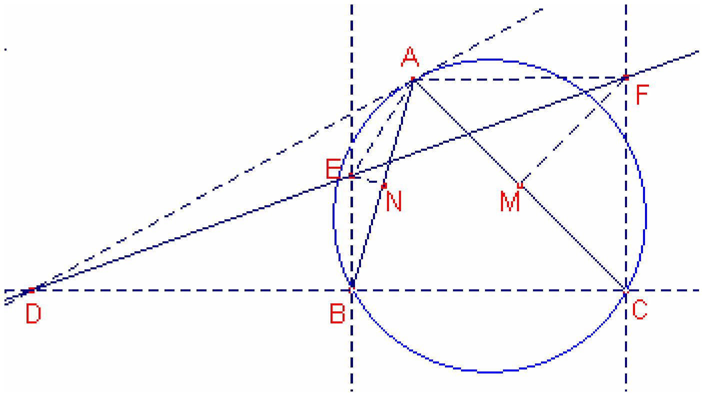
Problemes Geometria 31

1.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que $\overline{AC} \neq \overline{AB}$. Siga E tal que $\overline{AE} = \overline{BE}$ i $\overline{BE}$ perpendicular a $\overline{BC}$. Siga F tal que $\overline{AF} = \overline{CF}$ i $\overline{CF}$ perpendicular a $\overline{BC}$. Siga D la interesecció de la recta tangent a la circumferència circumscrita al triangle en A i la recta BC. Proveu que els punts D, E, F estan alineats.
Olimpíada Rússia 2003.



Solució:
Suposem sense pèrdua de generalitat que $\overline{AC} > \overline{AB}$.
F, E pertanyen a les mediatrius dels costats $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, respectivament.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AC}$.
$\overline{CM} = \frac{b}{2}$, $\angle MFC = C$.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CMF}$: $\overline{CF} = \frac{b}{2\sin C}$.

Siga N el punt mig del costat $\overline{AB}$. $\overline{BN} = \frac{C}{2}$, $\angle NEB = B$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BNE}$: $\overline{BE} = \frac{c}{2\sin B}$.
$\angle ADB$ és un angle exterior a la circumferència circumscrita al triangle la seua mesura és la semidiferència dels arcs que abraça, aleshores: $\angle ADB = B - C$.
$\angle BAD$ és un angle inscrit a la circumferència circumscrita al triangle la seua mesura és la meitat de l'arc que abraça, aleshores: $\angle BAD = C$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:
$\frac{\overline{BD}}{\sin C} = \frac{c}{\sin(B-C)}$, Aleshores: $\overline{BD} = \frac{c \cdot \sin C}{\sin(B-C)}$.

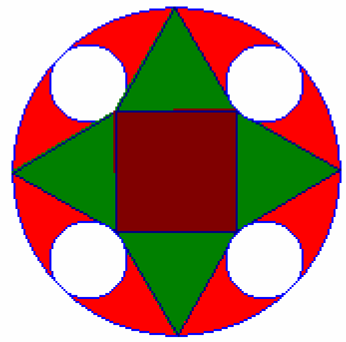
D, E, F estan alineats si els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DBE}$, $\overset{\Delta}{DCF}$ són semblants.
Vegem que les raons trigonomètriques són iguals.

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BD}} = \frac{\sin(B-C)}{2\sin B \cdot \sin C}.$$

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{BD} + a} = \frac{\frac{b}{2\sin C}}{\frac{c \cdot \sin C}{\sin(B-C)} + a} = \frac{\frac{c \cdot \sin B}{2\sin^2 C}}{\frac{c \cdot \sin C}{\sin(B-C)} + \frac{c \cdot \sin(B+C)}{\sin C}} =$$
$$= \frac{\sin B \cdot \sin(B-C)}{2\sin C\left(\sin^2 C + \sin(B-C) \cdot \sin(B+C)\right)} = \frac{\sin B \cdot \sin(B-C)}{2\sin C \cdot \sin^2 B} =$$
$$= \frac{\sin(B-C)}{2\sin C \cdot \sin B}$$

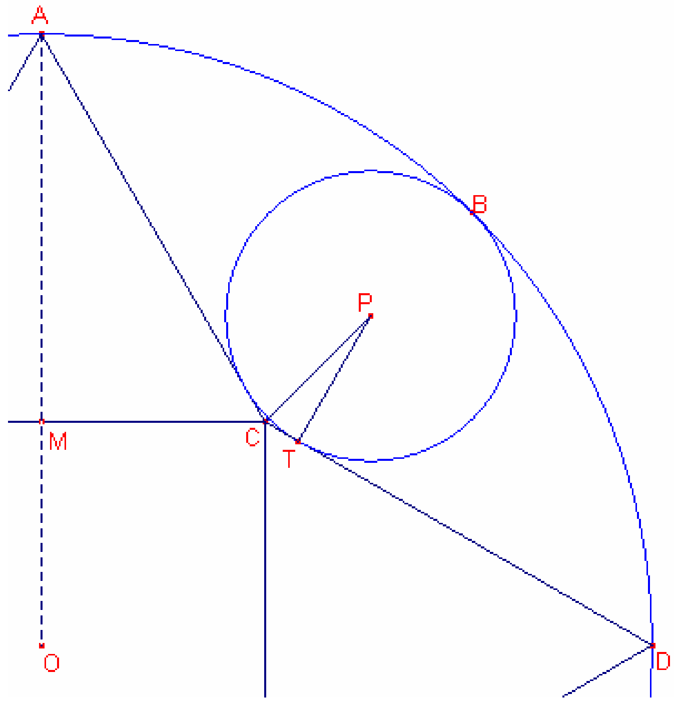
Aleshores, D, E, F estan alineats.

2.- Dins d'una circumferència de radi R s'ha dibuixat 1 quadrat, 4 triangles equilàters sobre els costats del quadrat i 4 circumferències tangent a la circumferència exterior i tangent als costats del triangle.
Calculeu el radi d'aquestes 4 circumferències.
Sangaku.



Solució:
Siga O el centre de la circumferència exterior de radi R.

Siga P el centre de la circumferència menuda (superior dreta).
Siga B el punt de tangència de les dues circumferències.
Siga C el vèrtex (superior dreta) del quadrat.
Siga A el vèrtex, exterior al quadrat, del triangle equilàter.



$R = \overline{OA}$.
Siga $r = \overline{PB} = \overline{PC}$ el seu radi.
Siga T el punt de la circumferència de radi r i el costat del triangle $\overline{CD}$.
Siga c el costat del quadrat.
Siga M el punt mig del costat superior del quadrat.

$\overline{OM} = \dfrac{c}{2}$. $\overline{AM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$

$\overline{OA} = \overline{OM} + \overline{AM} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}c$

$R = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}c$. Resolent l'equació en la incògnita c:

$c = \left(\sqrt{3}-1\right)R$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMC}$:

$\overline{OC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}c = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}R$.

Notem que $\angle ACD = 150^{o}$, $\angle CAD = 15^{o}$.
Aleshores, $\angle CPT = 15^{o}$.

$\overline{PC} = \overline{CB} - \overline{OC} - \overline{PB}$.

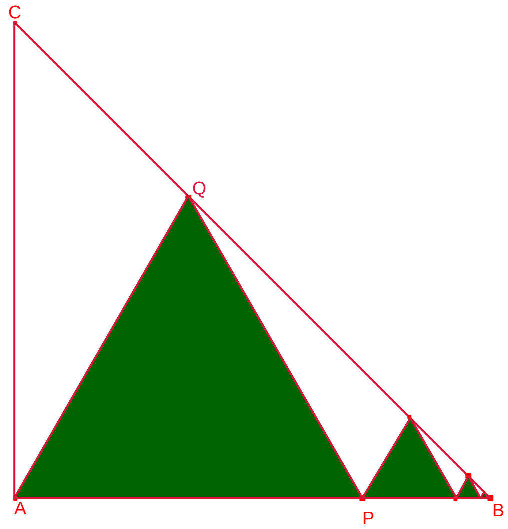
$\overline{PC} = R - \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - r$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CPT}$.

$\dfrac{r}{R - \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - r} = \cos 15^{o} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$r = \dfrac{-2+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}R$.

3.- Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ $A = 90^{o}$ de catets 36.
Des del vèrtex recte s'han dibuixat una seqüència de triangles equilàters que tenen una base en el catet $\overline{AB}$ i l'altre vèrtex en la hipotenusa.
Calculeu la suma infinita de les sumes de les àrees dels triangles equilàters.
Kömal 4286. Setembre 2010.



Solució:

Siga $\overset{\Delta}{APQ}$ el primer triangle equilàter i siga $c_1 = \overline{AP}$ el seu costat.

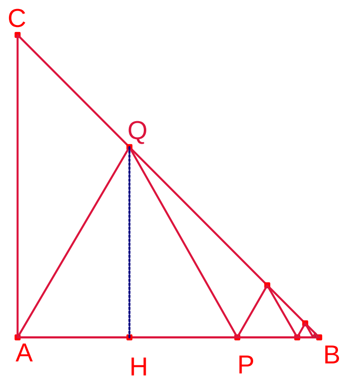
Siga $\overline{QH} = \frac{\sqrt{3}}{2} c_1$, l'altura del triangle equilàter.

$\overline{QH} = \overline{BH}$.

$36 - \frac{c_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} c_1$. Resolent l'equació:

$c_1 = 36\left(\sqrt{3} - 1\right)$

$\overline{PB} = 36\left(2 - \sqrt{3}\right)$.



El costat del segon triangle és:

$c_2 = 36\left(2 - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} - 1\right)$.

El costat de l'enèsim triangle és:

$c_n = 36\left(2 - \sqrt{3}\right)^{n-1}\left(\sqrt{3} - 1\right)$.

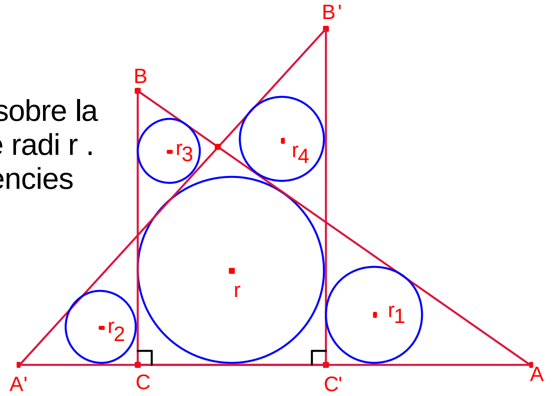
La successió de les àrees és:

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(36\left(2 - \sqrt{3}\right)^{n-1}\left(\sqrt{3} - 1\right)\right)^2 = \left(2\sqrt{3} - 3\right)36 \cdot 18\left(7 - 4\sqrt{3}\right)^{n-1}.$$

La suma de les infinites àrees és:

$$S_\infty = \frac{A_1}{1 - \left(7 - 4\sqrt{3}\right)} = \frac{\left(2\sqrt{3} - 3\right)36 \cdot 18}{2\left(2\sqrt{3} - 3\right)} = 36 \cdot 9 = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

4.- Dos triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ amb vèrtexs A’, C, C’, A sobre la mateixa recta, tenen la mateixa circumferència inscrita de radi r . Com es veu en el dibuix, s’han dibuixat quatre circumferències inscrites de radis respectius r_1, r_2, r_3, r_4.



Demostreu que $r_1 \cdot r_3 = r_2 \cdot r_4$.

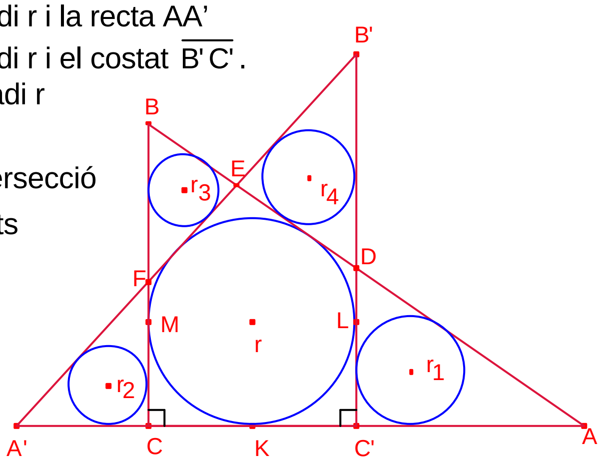
Sangaku. Calendari SM octubre 2010.

Solució:

Siga K el punt de tangència de la circumferència de radi r i la recta AA’

Siga L el punt de tangència de la circumferència de radi r i el costat $\overline{B'C'}$.

Siga M el punt de tangència de la circumferència de radi r i el costat $\overline{BC}$.



Siga D la intersecció dels segments $\overline{AB}, \overline{B'C'}$, E la intersecció dels segments $\overline{AB}, \overline{A'B'}$, F la intersecció dels segments $\overline{BC}, \overline{A'B'}$.

Notem que la circumferència de centre r és la circumferència exinscrita als triangles $\overset{\Delta}{AC'D}$, $\overset{\Delta}{A'CF}$, $\overset{\Delta}{FEB}$, $\overset{\Delta}{B'ED}$.

Per ser r el radi de la circumferència inscrita dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{A'B'C'}$: $r = \dfrac{a+b-c}{2} = \dfrac{a'+b'-c'}{2}$.

El semiperímetre del triangle $\overset{\Delta}{AC'D}$ és $\overline{AK} = b - r$.

El semiperímetre del triangle $\overset{\Delta}{A'CF}$ és $\overline{A'K} = b' - r$.

Notem que els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ADC'}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{b-2r}{b} = \frac{2(b-r)}{a+b+c} = \frac{2(b-r)-2(b-2r)}{a+b+c-2b} = \frac{2r}{a-b+c} \qquad (1)$$

Notem que els triangles $\overset{\Delta}{A'B'C'}$, $\overset{\Delta}{A'FC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{r_2}{r} = \frac{b'-2r}{b'} = \frac{2(b'-r)}{a'+b'+c'} = \frac{2(b'-r)-2(b'-2r)}{a'+b'+c'-2b'} = \frac{2r}{a'-b'+c'} \qquad (2)$$

Dividint les expressions (1) (2):

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{a'-b'+c'}{a-b+c} \qquad (3)$$

El semiperímetre del triangle $\overset{\Delta}{B'ED}$ és $\overline{B'L} = a' - r = \dfrac{a'-b'+c'}{2}$.

El semiperímetre del triangle $\overset{\Delta}{BEF}$ és $\overline{BM} = a - r = \dfrac{a-b+c}{2}$.

Notem que els triangles $\overset{\Delta}{FEB}$, $\overset{\Delta}{B'ED}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{r_4}{r_3} = \frac{a'-b'+c'}{a-b+c} \qquad (4)$$

De les expressions (3) (4): $r_1 \cdot r_3 = r_2 \cdot r_4$.

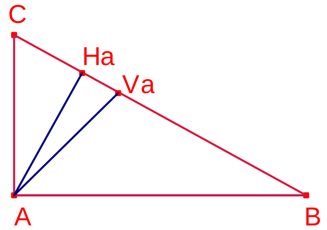
5.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $A = 90º$ de catet c fix i b i a variables.
Des del vèrtex A tracem l'altura $\overline{AH_a}$ i la bisectriu $\overline{AV_a}$, on H_a i V_a són els seus peus sobre $\overline{BC}$, respectivament.
Calculeu els següent límit:

$$\lim_{b\to c} \frac{\overline{AV_a} - \overline{AH_a}}{\overline{H_aV_a}^2}.$$

Solució:

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{H_aAC}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{CH_a} = \frac{b^2}{a},\ \overline{AH_a} = \frac{bc}{a}.$$



Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{\overline{BV_a}}{c} = \frac{a - \overline{BV_a}}{b} = \frac{a}{b+c}.\ \text{Aleshores, } \overline{BV_a} = \frac{ac}{b+c}.$$

$$\overline{H_aV_a} = a - \overline{CH_a} - \overline{BV_a} = a - \frac{b^2}{a} - \frac{ac}{b+c} = \frac{b(a^2 - b^2 - bc)}{a(b+c)}.$$

$$\overline{H_aV_a} = \frac{bc(c-b)}{a(b+c)}.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABV_a}$:

$$\frac{\overline{AV_a}}{\sin B} = \frac{c}{\sin(45º + B)},\ \text{aleshores, } \overline{AV_a} = \frac{c\frac{b}{a}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)} = \frac{\sqrt{2}bc}{b+c}.$$

$$\overline{AV_a} - \overline{AH_a} = \frac{\sqrt{2}bc}{b+c} - \frac{bc}{a} = \frac{abc\sqrt{2} - b^2c - bc^2}{a(b+c)} = \frac{bc\left(\sqrt{2}a - b - c\right)}{b+c}.$$

$$\lim_{b\to c} \frac{\overline{AV_a} - \overline{AH_a}}{\overline{H_aV_a}^2} = \lim_{b\to c} \frac{\frac{bc\left(\sqrt{2}a - b - c\right)}{b+c}}{\left(\frac{bc(c-b)}{a(b+c)}\right)^2} =$$

$$= \lim_{b\to c} \frac{a(b+c)\left(\sqrt{2}a - b - c\right)}{bc(c-b)^2} =$$

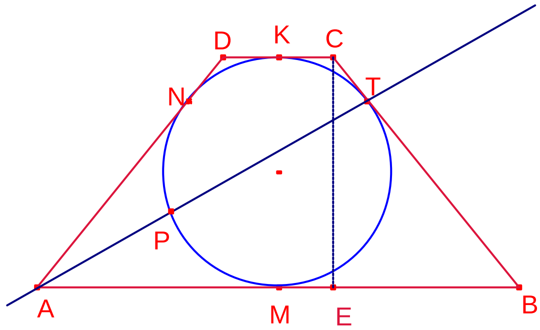
$$= \lim_{b\to c} \frac{\sqrt{b^2+c^2}(b+c)\left(\sqrt{2}\sqrt{b^2+c^2} - b - c\right)}{bc(c-b)^2} \cdot \frac{\left(\sqrt{2}\sqrt{b^2+c^2} + b + c\right)}{\left(\sqrt{2}\sqrt{b^2+c^2} + b + c\right)} =$$

$$= \lim_{b\to c} \frac{\sqrt{b^2+c^2}(b+c)}{bc\left(\sqrt{2}\sqrt{b^2+c^2} + b + c\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2c}.$$

6.- El trapezi isòsceles ABCD de bases paral·leles $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ té una circumferència que és tangent als quatre costats. Siga R el punt de Tangència de la circumferència i el costat $\overline{BC}$ i P el segon punt d'intersecció de la recta AT i la circumferència.

Si sabem que $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AT}} = \dfrac{2}{5}$, calculeu $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$.

OMA 26 Olimpíada Argentina Nacional.



Solució:

Siga $\overline{AP} = 2m$, $\overline{AT} = 5m$.

Siga E la projecció de C sobre el costat $\overline{AB}$.

Siga r el radi de la circumferència. $\overline{CE} = 2r$.

Siguen K, M, N els altres punts de tangència de la circumferència i el trapezi.

Siga $x = \overline{AM} = \overline{BM} = \overline{AN} = \overline{BT}$, $y = \overline{DK} = \overline{CK} = \overline{DN} = \overline{CT}$.

Siga $\alpha = \angle ABC$.

Aplicant la potència del punt A respecte de la circumferència.

$\overline{AP} \cdot \overline{AT} = \overline{AM}^2$.

$10m^2 = x^2$ (1)

$\overline{EB} = x - y$, $\overline{BC} = x + y$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCE}$:

$(x+y)^2 = (x-y)^2 + (2r)^2$. Simplificant:

$xy = r^2$ (2)

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCE}$:

$$\sin\alpha = \frac{2r}{x+y}, \quad \cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2r}{x+y}\right)^2}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABT}$:

$$(5m)^2 = (2x)^2 + x^2 - 2 \cdot 2x \cdot x \sqrt{1 - \frac{4r^2}{(x+y)^2}} \qquad (3)$$

Substituint les expressions (1) (2) en l'expressió (3):

$\dfrac{25}{10}x^2 = 5x^2 - 4x^2\sqrt{1 - \dfrac{4xy}{(x+y)^2}}$. Simplificant:

$\dfrac{5}{8} = \sqrt{1 - \dfrac{4xy}{x^2 + y^2 + 2xy}}$. Elevant al quadrat:

$\dfrac{39}{64} = \dfrac{4xy}{x^2 + y^2 + 2xy}$.

$39x^2 - 178xy + 39y^2 = 0$. Dividint l'expressió per y^2:

$39\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 178\left(\dfrac{x}{y}\right) + 39 = 0$. Resolent l'equació en la incògnita $\dfrac{x}{y}$:

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{2x}{2y} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{13}{3}$.

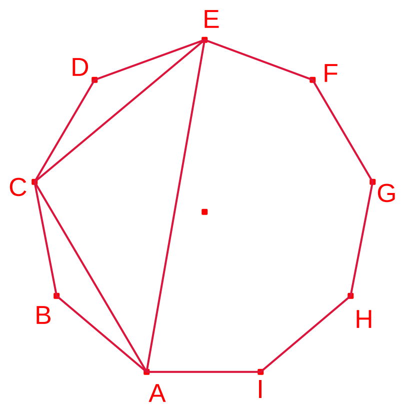
7.- En un polígon regular de 9 costats, de costat c, calculeu la diferència entre la diagonal major i la diagonal menor del polígon.
OMA 26 regional

Solució:

Siga ABCDEFGHI el polígon regular de 9 costats de costat $c = \overline{AB}$.

Una de les diagonals majors és $D = \overline{AE}$.

Una de les diagonals menors és $d = \overline{AC}$.



$$\angle BAC = \frac{\frac{360^o}{9}}{2} = 20^o, \ \angle ABC = 180^o - 2\angle BAC = 140^o.$$

$\angle CAE = 2\angle BAC = 40^o$.

$\angle ECA = 5\angle BAC = 100^o$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACE}$:

$$\frac{d}{\sin 40^o} = \frac{D}{\sin 100^o} = \frac{D-d}{\sin 100^o - \sin 40^o}.$$

$$\frac{d}{\sin 40^o} = \frac{D-d}{2 \cdot \cos 70^o \cdot \sin 30^o}.$$

$$\frac{d}{\sin 40^o} = \frac{D-d}{\cos 70^o}.$$

$$\frac{d}{2 \cdot \sin 20^o \cdot \cos 20^o} = \frac{D-d}{\sin 20^o}.$$

$$D - d = \frac{d}{2 \cdot \cos 20^o} \qquad (1)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{c}{\sin 20^o} = \frac{d}{\sin 140^o}.$$

$$\frac{c}{\sin 20^o} = \frac{d}{\sin 40^o}.$$

$$\frac{c}{\sin 20^o} = \frac{d}{2 \cdot \sin 20^o \cdot \cos 20^o}.$$

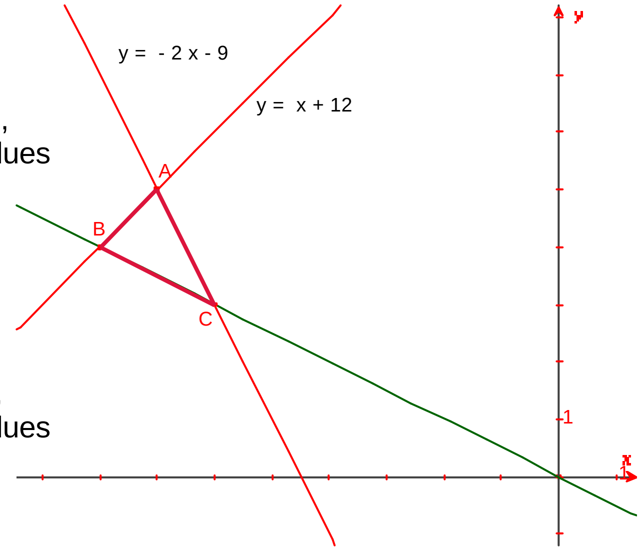
$$d = 2 \cdot \cos 20^o \cdot c \qquad (2)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):

$$D - d = \frac{2 \cdot \cos 20^o \cdot c}{2 \cdot \cos 20^o}.$$

$$D - d = c.$$

8.- Donades les rectes $r \equiv x - y + 12 = 0$, $s \equiv 2x + y + 9 = 0$, determineu la recta que passa per l'origen de coordenades i amb les rectes r, s forma un triangle d'àrea 1'5 unitats quadrades.
Kletenik 297



Solució:
Determinem el punt A d'intersecció de les rectes r, s, resolent el sistema format per les equacions d'ambdues rectes.

$$\begin{cases} x - y + 12 = 0 \\ 2x + y + 9 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -7 \\ y = 5 \end{cases}.$$

Les coordenades del punt A són $A(-7,5)$.

La recta que cerquem té equació $t \equiv y = mx$.

Determinem el punt B d'intersecció de les rectes r, t, resolent el sistema format per les equacions d'ambdues rectes.

$$\begin{cases} x - y + 12 = 0 \\ y = mx \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \dfrac{-12}{1-m} \\ y = \dfrac{-12m}{1-m} \end{cases}.$$

Les coordenades del punt B són $B\left(\dfrac{-12}{1-m}, \dfrac{-12m}{1-m}\right)$.

Determinem el punt C d'intersecció de les rectes s, t, resolent el sistema format per les equacions d'ambdues rectes.

$$\begin{cases} 2x + y + 9 = 0 \\ y = mx \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \dfrac{-9}{2+m} \\ y = \dfrac{-9m}{2+m} \end{cases}.$$ Les coordenades del punt C són $C\left(\dfrac{-9}{2+m}, \dfrac{-9m}{2+m}\right)$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$\pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \dfrac{-12}{1-m} + 7 & \dfrac{-12m}{1-m} - 5 \\ \dfrac{-9}{2+m} + 7 & \dfrac{-9m}{2+m} - 5 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}.$$

$$\pm \frac{(7m+5)^2}{(1-m)(2+m)} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3.$$

Simplificant:

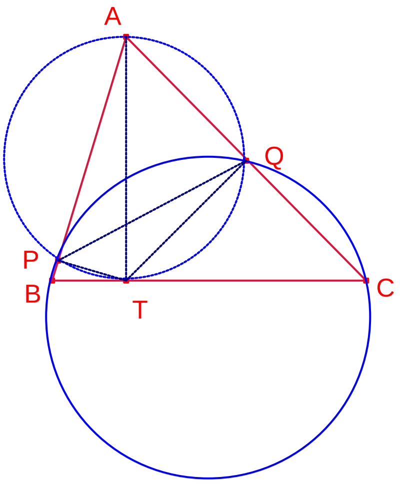
$49m^2 + 71m + 23 = 0$, o bé, $48m^2 + 69m + 27 = 0$.

Les solucions de la primera equació són: $m = \dfrac{-1}{2}$, $m = \dfrac{-23}{25}$.

La segona equació no té solució real.
Les rectes que cerquem són:

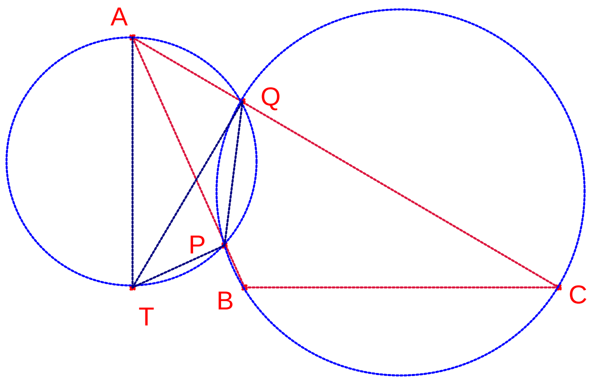
$t \equiv y = \dfrac{-1}{2}x$, o bé, $t \equiv y = \dfrac{-23}{25}x$.

9.- Siga T el peu de l'altura traçada des del vèrtex A del triangle acutangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Les perpendiculars des de T als costats $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ tallen aquests costats en els punts P i Q, respectivament. Proveu que el quadrilàter BPQC és cíclic.
Kömal C1052. Novembre 2010.



Solució:
El quadrilàter APTQ és cíclic ja que els angles oposats,
$P = 90^o$, $Q = 90^o$ són suplementaris.
Notem que $\angle QTC = 90^o - C$. Aleshores, $\angle ATQ = C$
Els angles $\angle APQ$, $\angle ATQ = C$ són inscrits en una circumferència per tant mesuren igual.
Aleshores, $\angle APQ = C$, aleshores, $\angle QPB = 180^o - C$
Aleshores, BPQC és cíclic, ja que els angles oposats P, C són suplementaris.

Nota: si el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és obtusangle la propietat també s'acompleix. El quadrilàter APTQ (creuat) és cíclic.



10.- Considerem el cub ABCDA'B'C'D'.

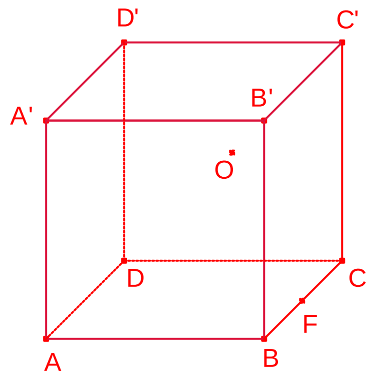
Siga F el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.

Siga O el centre de la cara CDD'C'

El plànol que passa pels punts A, F, O divideix el cub en dues parts.

Calculeu la raó entre els volums de les dues parts.

Kömal C1054. Novembre 2010.



Solució:

Considerem el sistema de referència $\{A; \{\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA'}\}\}$

Les coordenades del cub són:

$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$, $A'(0,0,1)$, $B'(1,0,1)$, $C'(1,1,1)$, $D'(0,1,1)$.

Les coordenades de F i O són:

$F\left(1,\frac{1}{2},0\right)$, $O\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$.

L'equació del plànol que passa pels punts A, F O és:

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

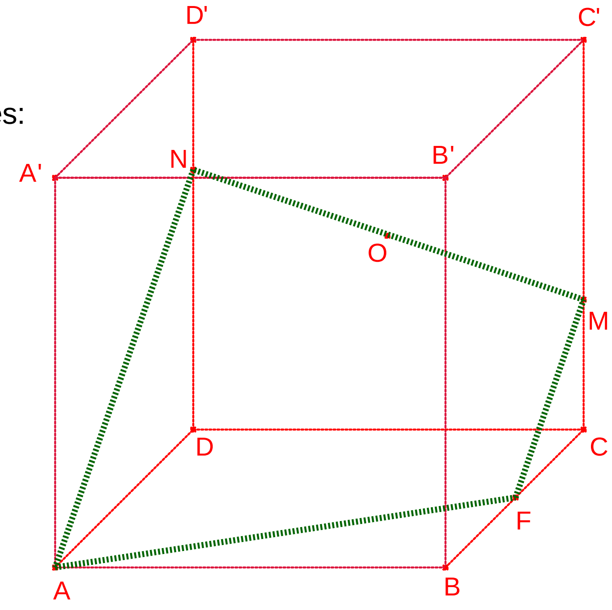
$\Pi \equiv x - 2y + 3z = 0$.

El plànol talla la recta CC' en el punt M que té coordenades:

$M\left(1,1,\frac{1}{3}\right)$

El plànol talla la recta DD' en el punt N que té coordenades:

$N\left(0,1,\frac{2}{3}\right)$



La secció del plànol Π i el cub és és trapezi AFMN.

Un dels cossos que divideix el plànol Π i el cub és el tronc de piràmide de bases paral·leles els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADN}$, $\overset{\Delta}{FCM}$ i altura $\overline{CD}$.

El volum d'un tronc de piràmide és:

$$V = \frac{1}{3}\left(S_B + S_b + \sqrt{S_B \cdot S_b}\right)h.$$

$$S_B = S_{ADN} = \frac{1}{3},\; S_b = S_{FCM} = \frac{1}{12},\; h = \overline{CD} = 1.$$

$$V_{tronc} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \sqrt{\frac{1}{3}\frac{1}{12}}\right)1 = \frac{7}{36}.$$

El volum de la l'altre cos que determina el plànol és:

$$V_{resta} = 1 - \frac{7}{36} = \frac{29}{36}.$$

La raó entre els dos volums és: $\frac{7}{29}$.