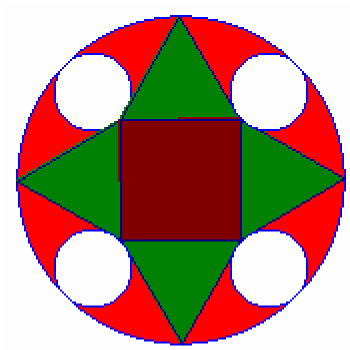
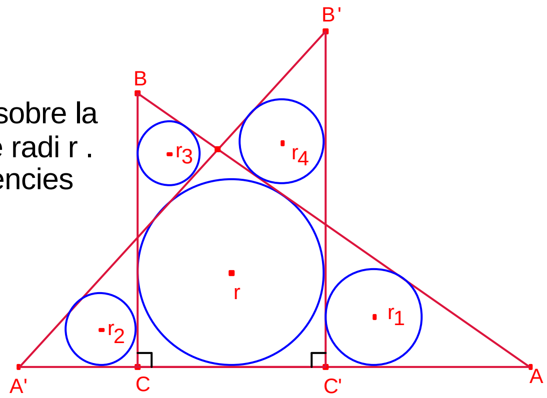
Problemes Geometria 31

1.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que $\overline{AC} \neq \overline{AB}$. Siga E tal que $\overline{AE} = \overline{BE}$ i $\overline{BE}$ perpendicular a $\overline{BC}$. Siga F tal que $\overline{AF} = \overline{CF}$ i $\overline{CF}$ perpendicular a $\overline{BC}$. Siga D la interesecció de la recta tangent a la circumferència circumscrita al triangle en A i la recta BC. Proveu que els punts D, E, F estan alineats.
Olímpíada Rússia 2003.

2.- Dins d'una circumferència de radi R s'ha dibuixat 1 quadrat, 4 triangles equilàters sobre els costats del quadrat i 4 circumferències tangent a la circumferència exterior i tangent als costats del triangle.
Calculeu el radi d'aquestes 4 circumferències.
Sangaku.



4.- Dos triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ amb vèrtexs A', C, C', A sobre la mateixa recta, tenen la mateixa circumferència inscrita de radi r . Com es veu en el dibuix, s'han dibuixat quatre circumferències inscrites de radis respectius r_1, r_2, r_3, r_4.
Demostreu que $r_1 \cdot r_3 = r_2 \cdot r_4$.
Sangaku. Calendari SM octubre 2010.



5.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $A = 90º$ de catet c fix i b i a variables.
Des del vèrtex A tracem l'altura $\overline{AH_a}$ i la bisectriu $\overline{AV_a}$, on H_a i V_a són els seus peus sobre $\overline{BC}$, respectivament.
Calculeu els següent límit:

$$\lim_{b \to c} \frac{\overline{AV_a} - \overline{AH_a}}{\overline{H_aV_a}^2}.$$

6.- El trapezi isòsceles ABCD de bases paral·leles $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ té una circumferència que és tangent als quatre costats. Siga R el punt de Tangència de la circumferència i el costat $\overline{BC}$ i P el segon punt d'intersecció de la recta AT i la circumferència.
Si sabem que $\frac{\overline{AP}}{\overline{AT}} = \frac{2}{5}$, calculeu $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$.
OMA 26 Olimpíada Argentina Nacional.

7.- En un polígon regular de 9 costats, de costat c, calculeu la diferència entre la diagonal major i la diagonal menor del polígon.
OMA 26 regional

8.- Donades les rectes $r \equiv x - y + 12 = 0$, $s \equiv 2x + y + 9 = 0$, determineu la recta que passa per l'origen de coordenades i amb les rectes r, s forma un triangle d'àrea 1'5 unitats quadrades.
Kletenik 297

9.- Siga T el peu de l'altura traçada des del vèrtex A del triangle acutangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Les perpendiculars des de T als costats $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ tallen aquests costats en els punts P i Q, respectivament. Proveu que el quadrilàter BPQC és cíclic.
Kömal C1052. Novembre 2010.

10.- Considerem el cub ABCDA'B'C'D'.
Siga F el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.
Siga O el centre de la cara CDD'C'
El plànol que passa pels punts A, F, O divideix el cub en dues parts.
Calculeu la raó entre els volums de les dues parts.
Kömal C1054. Novembre 2010.