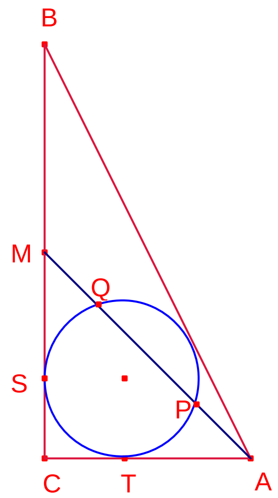
Problemes Geometria 32

1.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $C = 90^{o}$, $\overline{AC} = 1$.
La mitjana $\overline{AM}$ talla la circumferència inscrita en els punts P, Q,(P entre A i Q) tal que $\overline{AP} = \overline{QM}$. Determineu la mesura del segment $\overline{PQ}$.

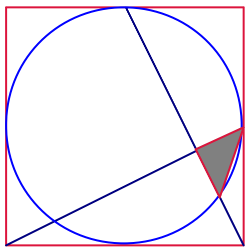
Solució:

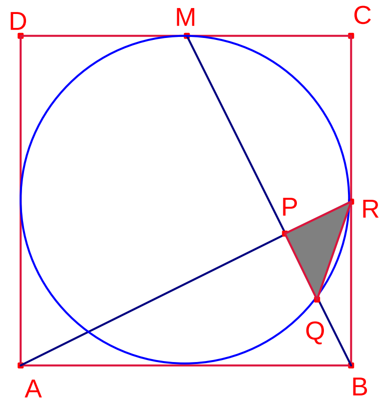


Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga T el punt de tangència de la circumferència inscrita i el costat $\overline{CA}$.
Siga S el punt de tangència de la circumferència inscrita i el costat $\overline{CB}$.
$\overline{CT} = \overline{CS} = r$.
Aplicant la potència del punt A respecte de la circumferència inscrita:
$\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AT}^2$.
$\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = (1-r)^2$.
Aplicant la potència del punt M respecte de la circumferència inscrita:
$\overline{MQ} \cdot \overline{MP} = \overline{AS}^2$.
$\overline{MQ} \cdot \overline{MP} = \left(\frac{a}{2} - r\right)^2$.
Com que $\overline{AP} = \overline{QM}$, aleshores, $\overline{AQ} = \overline{AP} + \overline{PQ} = \overline{QM} + \overline{PQ} = \overline{MP}$.
Aleshores, $(1-r)^2 = \left(\frac{a}{2} - r\right)^2$. Simplificant:
$a = 2$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AB} = \sqrt{5}$.
En un triangle rectangle el radi de la circumferència inscrita és:
$r = \dfrac{\overline{CA} + \overline{CB} - \overline{AB}}{2}$.
$r = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.
$\overline{CM} = \dfrac{a}{2} = 1$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:
$\overline{AM} = \sqrt{2}$.
$\overline{AM} = 2 \cdot \overline{AP} + \overline{PQ}$ (1)
$\overline{AP} \cdot \left(\overline{AP} + \overline{PQ}\right) = (1-r)^2$ (2)
Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):
$\begin{cases} 2 \cdot \overline{AP} + \overline{PQ} = \sqrt{2} \\ \overline{AP} \cdot \left(\overline{AP} + \overline{PQ}\right) = \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases} \overline{AP} = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{-4+2\sqrt{5}}}{2} \\ \overline{PQ} = \sqrt{-4+2\sqrt{5}} \end{cases}$.
Aleshores, $\overline{PQ} = \sqrt{-4+2\sqrt{5}}$.

2.- En la figura hi ha un quadrat i el cercle que li és inscrit.
Tracem dos segments que uneixen dos vèrtexs consecutius del quadrat amb els punts migs dels costats oposats.
Considerem el triangle ombrejat que té per vèrtexs el punt mig d'un costat i els punts d'intersecció del segment anterior que no passa per aquest vèrtex amb l'altre segment i amb el cercle.
Si l'àrea del triangle és 10cm^2 determineu la mesura del costat del quadrat.
Proves Cangur 2010. Problema 29.





Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB}=2a$
Sigen R, M els punts migs dels costats $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, respectivament.
Siga P la intersecció dels segment $\overline{AR}$, $\overline{BM}$.
$\overline{BR}=a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABR}$:
$\overline{AR}=a\sqrt{5}$.
Siga $x=\overline{PR}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABR}$, $\overset{\Delta}{BPR}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{BR}=2x$.

Aplicant el teorema de Tales al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BPR}$:
$x^2+(2x)^2=a^2$.

Aleshores, $x=\frac{\sqrt{5}}{5}a$.

Siga $m=\overline{BQ}$.
Aplicant la potència de B respecte de la circumferència:
$\overline{BQ}\cdot\overline{BM}=\overline{BR}^2$.
$m\cdot a\sqrt{5}=a^2$.

Aleshores, $\overline{BQ}=\frac{\sqrt{5}}{5}a$.

Per tant, $\overline{PQ}=\overline{BQ}=\frac{\sqrt{5}}{5}a$.

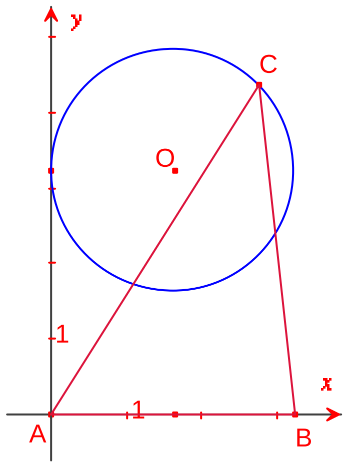
$S_{PQR}=\frac{x^2}{2}=10$.

$\frac{1}{5}a^2=20$. Aleshores, $a=10$.
El costat del quadrat mesura, $\overline{AB}=2a=20$.

3.- Dos vèrtexs d'un triangle són fixos. El tercer vèrtex recorre una corba tal que la suma dels quadrats dels costats del triangle és igual a 8 vegades l'àrea del triangle. Quina corba recorre el vèrtex variable.
Kömal Desembre 2010. C1058.

Solució:

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de vèrtexs fixos $A(0,0)$, $B(c,0)$.
Siga $C(a,b)$ variable.



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC}=\frac{cb}{2}.$$

$$\overline{AB}^2=c^2,\ \overline{AC}^2=a^2+b^2,\ \overline{BC}^2=(c-a)^2+b^2.$$

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=8\cdot S_{ABC}.$$

$$c^2+a^2+b^2+(c-a)^2+b^2=8\frac{bc}{2}.$$

Simplificant:

$$a^2+b^2-ca-2cb=0.$$

$$\left(a-\frac{c}{2}\right)^2+(b-c)^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Que és una circumferència que té el centre en la mediatriu del costat $\overline{AB}$ a una distància $\overline{AB}$ del costat $\overline{AB}$ i radi $\frac{\overline{AB}}{2}$.

4.- Considerem el quadrat ABCD.

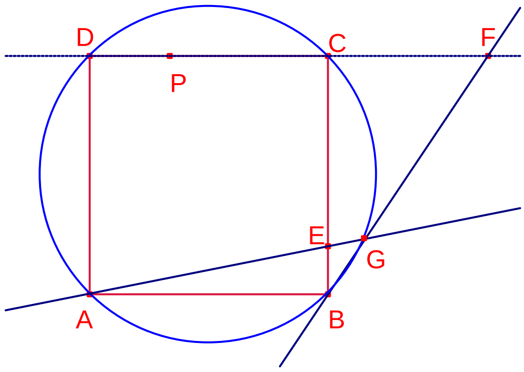
Siga E el punt del més prop de B, del costat $\overline{BC}$ tal que divideix el costat $\overline{BC}$ en dos segments que estan en proporció 1:4.

Siga P el punt més prop de D, del costat $\overline{DC}$ que divideix el costat $\overline{DC}$ en dos segments que estan en proporció 1:2.

Siga F el punt simètric de P respecte de C. Les rectes AE i BF és tallen en el punt G.

Proveu que G pertany a la circumferència circumscrita al quadrat ABCD.

Kömal desembre 2010, B4316.



Solució:

Per a provar que G pertany a la circumferència circumscrita al quadrat ABCD és suficient provar que el quadrilàter ABGC és inscriptible, aplicant el teorema de Tolomeu és suficient provar que els angles $\angle CAB$, $\angle BGC$ són suplementaris.

Per tant és suficient provar que $\angle BGC = 135^o$.

Sense perdre generalitat poden suposar que el costat del quadrat ABCD és $\overline{AB} = 15$.

Siga $\alpha = \angle BAE$, $\beta = \angle CBF$, $\gamma = \angle BGC$.

$\overline{BE} = \frac{1}{5}\overline{BC} = 3$, $\overline{DP} = \frac{1}{3}\overline{CD} = 5$. Aleshores, $\overline{CF} = 10$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABE}$:

$\overline{AE} = \sqrt{15^2 + 3^2} = 3\sqrt{26}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCF}$:

$\overline{BF} = \sqrt{15^2 + 10^2} = 5\sqrt{13}$.

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{26}}{26}$, $\cos\alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26}$. $\sin\beta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABG}$: $\frac{\overline{BG}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\sin(90-\alpha-\beta)}$.

$$\overline{BG} = 15\frac{\frac{\sqrt{26}}{26}}{\frac{5\sqrt{26}}{26}\frac{3\sqrt{13}}{13} - \frac{\sqrt{26}}{26}\frac{2\sqrt{13}}{13}}.$$ Simplificant:

$\overline{BG} = \frac{15}{13}\sqrt{13}$. $\overline{FG} = \overline{BF} - \overline{BG} = \frac{50}{13}\sqrt{13}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CFG}$:

$\overline{CG}^2 = 10^2 + \left(\frac{50}{13}\sqrt{13}\right)^2 - 2\cdot 10\frac{50}{13}\sqrt{13}\cdot\frac{2\sqrt{13}}{13} = \frac{1800}{13}$. Aleshores, $\overline{CG} = \frac{30}{13}\sqrt{26}$.

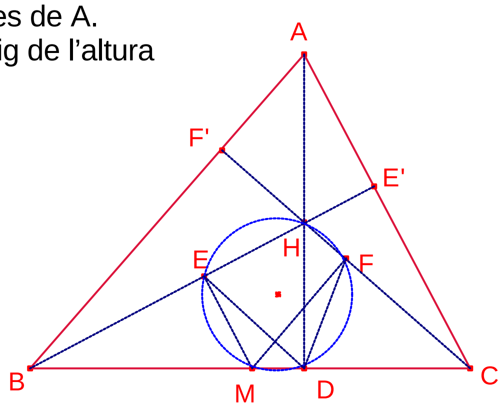
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CGB}$:

$15^2 = \left(\frac{15}{13}\sqrt{13}\right)^2 + \left(\frac{30}{13}\sqrt{26}\right)^2 - 2\cdot\frac{15}{13}\sqrt{13}\cdot\frac{30}{13}\sqrt{26}\cdot\cos\gamma$. Simplificant:

$\cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, aleshores, $\gamma = \angle BGC = 135^o$.

Aleshores, G pertany a la circumferència circumscrita al quadrat ABCD.

5.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, siga D el peu de l'altura traçada des de A. Siga E el punt mig de l'altura traçada des de B i F el punt mig de l'altura traçada des de C. Demostreu que $\angle EDF = A$.
Kömal gener 2010, B4324.



Solució:
Siga E' el peu de l'altura traçada des de B.
Siga F' el peu de l'altura traçada des de C.
Siga H l'ortocentre, intersecció de les altures.

$\angle BHC = 180^{o} - (\angle E'BC + BCF') =$

$= 180^{o} - \big((90^{o} - C) + (90^{o} - B)\big) = B + C = 180^{o} - A$

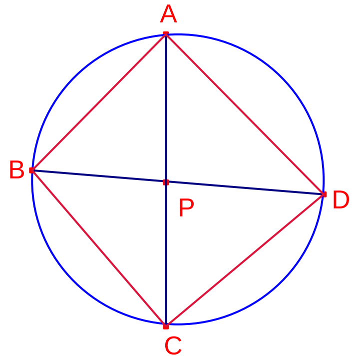
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

$\overline{ME}$ és la paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{BCE'}$,
aleshores, $\angle BME = C$.
Com que $\angle E'BC = 90^{o} - C$, aleshores, $\angle BEM = \angle MEE' = 90^{o}$.

Anàlogament, $\overline{MF}$ és paral·lela mitjana de $\overset{\Delta}{BCF'}$, Aleshores, $\angle FMC = B$,
$\angle CFM = \angle MFF' = 90^{o}$.
Per tant, $\angle EMF = 180^{o} - (B + C) = A$.

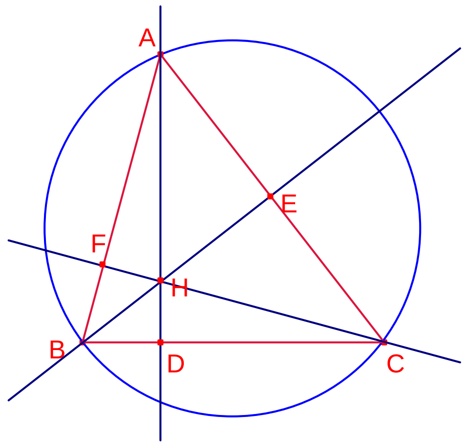
El quadrilàter HEMF és inscriptible ja que els angles oposats $\angle BHC$, $\angle EMF$, són suplementaris.
$\angle MFH = \angle MFF' = 90^{o}$, $\angle HDM = 90^{o}$.
Aleshores, el quadrilàter HMDF és inscriptible.
Aleshores, el pentàgon HEMDF és inscritptible $\angle EDF = \angle EMF = A$, per que els dos angles són inscrits i abracen el mateix arc.

6.- El quadrilàter ABCD és inscriptible en una circumferència.
Si $\overline{AB}=10$, $\overline{AD}=12$, $\overline{CD}=11$ i la diagonal $\overline{BD}$ passa pel punt mig de la diagonal $\overline{AC}$, determineu les mesures del costat $\overline{BC}$ i les diagonals $\overline{AC}$, $\overline{BD}$.



Solució:
Siga P el punt intersecció de les dues diagonals $\overline{AC}$, $\overline{BD}$.
Siga $a=\overline{AP}=\overline{CP}$, $b=\overline{BP}$, $c=\overline{DP}$.
Siga $x=\overline{BC}$.
Aplicant la potència de P respecte de la circumferència:
$\overline{AP}\cdot\overline{CP}=\overline{BP}\cdot\overline{DP}$, $a^2=bc$ (1)
Els triangles $B\overset{\Delta}{P}A$, $C\overset{\Delta}{P}D$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{b}{10}=\frac{a}{11} \quad (2)$$
Els triangles $A\overset{\Delta}{P}D$, $B\overset{\Delta}{P}C$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{c}{12}=\frac{a}{x} \quad (3)$$
Multiplicant les expressions (2) (3):
$$\frac{bc}{120}=\frac{a^2}{11x} \quad (4)$$
Com que de l'expressió (1) $a^2=bc$, aleshores:
$11x=120$, per tant, $x=\dfrac{120}{11}$ (5)
Aplicant el Teorema de Tolomeu al quadrilàter inscriptible ABCD:
$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$.
$12x+110=2a(b+c)$ (6)
De l'expressió (2):
$$b=\frac{10}{11}a \quad (7)$$
De l'expressió (3):
$$c=\frac{12}{x}a \quad (8)$$
Substituint les expressions (5), (7), (8) en l'expressió (6):
$12\dfrac{120}{11}+110=2a\left(\dfrac{10}{11}a+\dfrac{11}{10}a\right)$. Resolent l'equació:
$$a=\frac{5\sqrt{117130}}{221} \quad (9)$$
Substituint l'expressió (9) en les expressions (7) (8):
$$b=\frac{50\sqrt{117130}}{2431},\ c=\frac{11\sqrt{117130}}{442} \quad (10)$$
Aleshores, $\overline{AC}=2a=\dfrac{10\sqrt{117130}}{221}$. $\overline{BD}=b+c=\dfrac{\sqrt{117130}}{22}$ (11)

7.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{BC}=16$. Siga H l'ortocentre (intersecció de les altures.
Si el diàmetre de la circumferència circumscrita al triangle mesura 20, determineu la mesura del segment $\overline{AH}$.



Solució:
Suposem que A és acutangle.
Siguen D, E, F els peus de les altures.
$\angle FCA = 90º - A$, $\angle DAC = 90º - C$.
Aleshores, $\angle AHC = 180º - B$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R.$$

$$\frac{16}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 20.$$

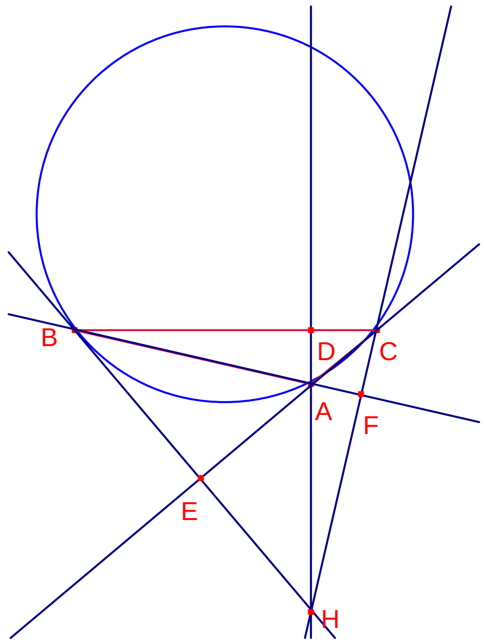
$\sin A = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$. Notem que A no pot ser rectangle.

$$\cos A = \frac{3}{5}.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AHC}$:

$$\frac{\overline{AH}}{\sin(90º - A)} = \frac{b}{\sin(180º - B)}$$

$\frac{\overline{AH}}{\cos A} = \frac{b}{\sin B} = 20$. Aleshores, $\overline{AH} = 20\cos A = 20 \cdot \frac{3}{5} = 12$.



Suposem que A és obtusangle.
$\angle FCA = A - 90º$, $\angle DAC = 90º - C$.
Aleshores, $\angle AHC = B$.

$$\cos A = \frac{-3}{5}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AHC}$:

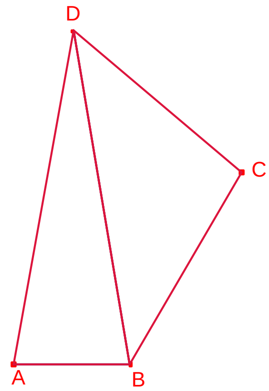
$$\frac{\overline{AH}}{\sin(A - 90º)} = \frac{b}{\sin B}.$$

$\frac{\overline{AH}}{-\cos A} = \frac{b}{\sin B} = 20$. Aleshores,

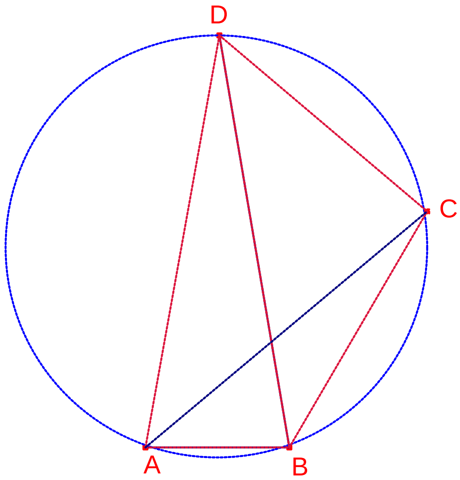
$$\overline{AH} = -20\cos A = 20 \cdot \frac{3}{5} = 12.$$

Notem que la mesura del segment $\overline{AH}$ no depén del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

8.- El quadrilàter ABCD de la figura té àrea unitat i està construït adjuntant dos triangles isòsceles $\overset{\Delta}{ABD}$ i $\overset{\Delta}{BCD}$ en què els costats desiguals són $\overline{AB}$ i $\overline{BD}$, respectivament.
Si $\angle ADB = 20^o$ i $\angle DCB = 100^o$ calculeu el valor del producte $\overline{AC} \cdot \overline{BD}$.
Proves Cangur 2004, nivell 4. problema 30.



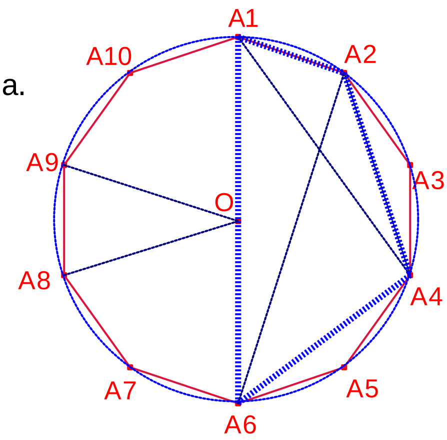
Solució:
$\angle DAB = 80^o$.
Aleshores, el quadrilàter ABCD és inscriptible ja que te els angles oposats A, C, suplementaris.



Aplicant el teorema de Tolomeu:
$\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$.
Com que $\overline{AD} = \overline{BD}$ i $\overline{BC} = \overline{CD}$:
$$\overline{BD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD} \qquad (1)$$
$\angle BDC = 40^o$, aleshores:
$\angle ADC = 60^o$, $\angle ABC = 120^o$.
L'àrea del quadrilàter ABCD és igual a la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ADC}$. Aplicant la fórmula trigonomètrica de l'àrea:
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(\overline{BC} \cdot \overline{AB} \cdot \sin 60^o\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{AD} \cdot \overline{CD} \cdot \sin 120^o\right) = 1.$$
$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\overline{BC} \cdot \overline{AB} + \overline{BD} \cdot \overline{BC}\right) = 1$$
$$\overline{BD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{BC} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \qquad (2)$$
De les expressions (1) (2):
$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

9.- En un cercle de radi r inscrivim un decàgon regular de vèrtexs $A_1, A_2, A_3, ..., A_{10}$.
Demostreu que $\overline{A_1A_4} - \overline{A_1A_2} = r$
Olimpíada local Catalunya 2011.

Solució:
Siga $c = \overline{A_1A_2}$ costat del decàgon. Siga $r = \overline{OA_1}$ radi de la circumferència inscrita al decàgon.



$\overline{A_2A_4}$ és el costat del pentàgon inscrit en la circumferència.
$\overline{A_2A_6}$ és la diagonal del pentàgon inscrit en la circumferència.

$$\frac{\overline{A_2A_6}}{\overline{A_2A_4}} = \Phi .$$

$\angle A_8OA_9 = 36^o$.

$$\frac{\overline{OA_9}}{\overline{A_8A_9}} = \Phi . \quad \frac{r}{c} = \Phi .$$

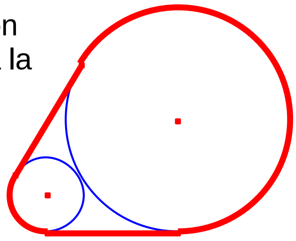
Siguen $d = \overline{A_1A_4}$, $e = \overline{A_1A_3}$.

Aplicant el teorema de Tolomeu al quadrilàter inscriptible $A_1A_2A_4A_6$.
$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_4A_6} + \overline{A_2A_4} \cdot \overline{A_1A_6} = \overline{A_1A_4} \cdot \overline{A_2A_6}$.
$ce + 2re = \Phi ed$. Simplificant:
$c + 2r = \Phi d$.

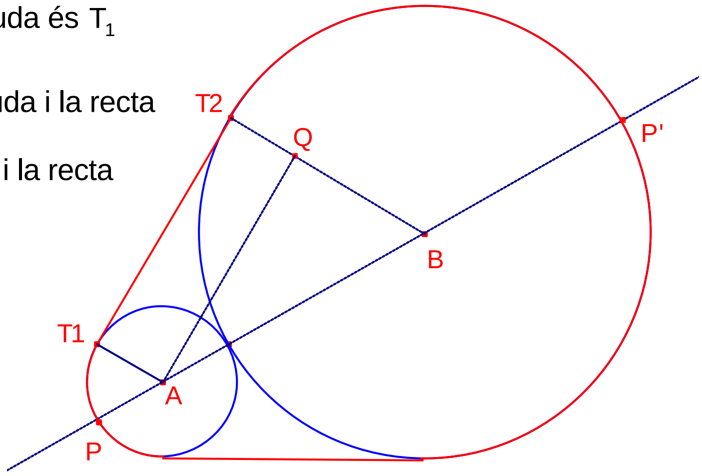
$$d = \frac{c}{\Phi} + \frac{2r}{\Phi}.$$

$$d - c = \frac{c}{\Phi} + \frac{2r}{\Phi} - c = \frac{r}{\Phi^2} + \frac{2r}{\Phi} - \frac{r}{\Phi} = \frac{r}{\Phi^2} + \frac{r}{\Phi} = \frac{1+\Phi}{\Phi^2} r = r .$$

10.- Dos discos de 6cm i 18 cm de diàmetre, respectivament, són tangents exteriorment i estan envoltats per un fil, tal com mostra la figura.
Calculeu la longitud del fil que els envolta.
Proves Cangur 1999, nivell 4. Problema 22.



Solució:
Siguen A i B els centres de les circumferències.
El punt de tangència de la circumferència menuda és T_1 i el de la gran T_2.
Siga P la intersecció de la circumferència menuda i la recta que uneix els centres AB.
Siga P' la intersecció de la circumferència gran i la recta AB.



$\overline{AT_1}=3$, $\overline{BT_2}=9$.
Siga Q la projecció de A sobre el radi $\overline{BT_2}$.
$\overline{BQ}=\overline{BT_2}-\overline{AT_1}=6$, $\overline{AB}=3+9=12$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AQB}$:
$\overline{AQ}=\overline{T_1T_2}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$.
$\angle ABQ=\arccos\frac{6}{12}=60^{\circ}$.
Aleshores, $\angle PAT_1=\angle ABQ=60^{\circ}$.

L'arc menor $\overset{\frown}{T_1P}=60^{\circ}$, la sisena part de la circumferència.

L'arc menor $\overset{\frown}{T_2P'}=120^{\circ}$, la tercera part de la circumferència.

La longitud del fil és el doble de la suma de l'arc $\overset{\frown}{T_1P}$ el segment $\overline{T_1T_2}$ i l'arc $\overset{\frown}{T_2P'}$:

$$L_{fil}=2\left(\frac{1}{6}(2\pi\cdot 3)+6\sqrt{3}+\frac{1}{3}(2\pi\cdot 9)\right)=12\sqrt{3}+14\pi.$$