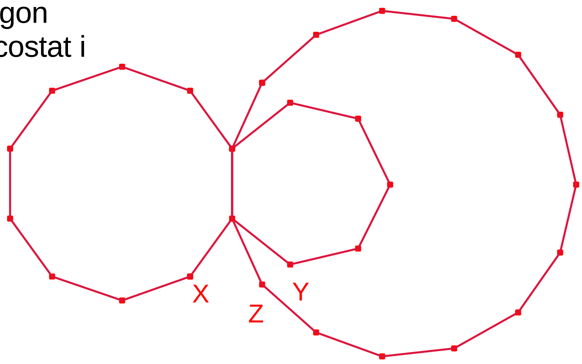
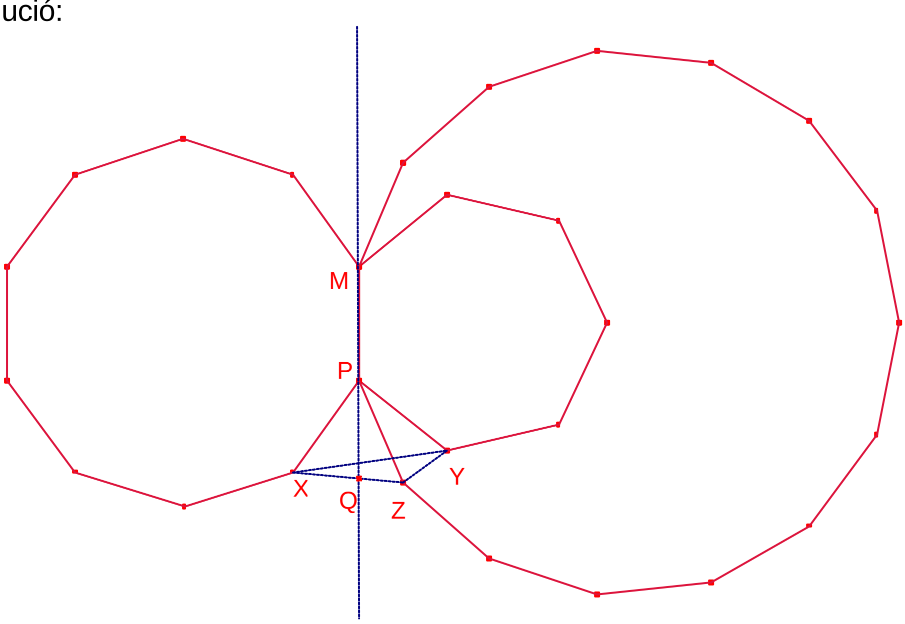
Problemes Geometria 33

1.- En la figura hi ha un heptàgon regular, un decàgon regular i un polígon regular de 15 costats. D'igual costat i amb un costat comú.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle XYZ$.



Solució:



La recta MP talla el segment $\overline{XQ}$.

$\angle XPQ$ és l'angle exterior del polígon regular de 10 costats: $\angle XPQ = \frac{360^o}{10} = 36^o$.

$\angle QPZ$ és l'angle exterior del polígon regular de 15 costats: $\angle QPZ = \frac{360^o}{15} = 24^o$.

$\angle QPY$ és l'angle exterior del polígon regular de 7 costats: $\angle QPY = \frac{360^o}{7}$.

$\angle ZPY = \angle QPY - \angle QPZ = \frac{360^o}{7} - 24^o = \frac{192^o}{7}$.

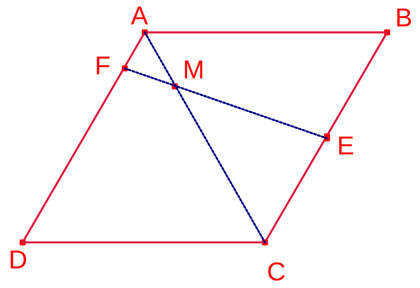
$\angle XPY = \angle XPQ + \angle QPY = 36^o + \frac{360^o}{7} = \frac{612^o}{7}$.

Per ser el triangle $\overset{\Delta}{XPY}$ isòsceles: $\angle PYX = \frac{180^o - \angle XPY}{2} = \frac{324^o}{7}$.

Per ser el triangle $\overset{\Delta}{ZPY}$ isòsceles: $\angle PYZ = \frac{180^o - \angle ZPY}{2} = \frac{534^o}{7}$.

$\angle XYZ = \angle PYZ - \angle PYX = \frac{534^o}{7} - \frac{324^o}{7} = 30^o$.

2.- L'angle en el vèrtex A del rombe ABCD de costat a és igual a 120º.
Els punts E i F pertanyen als costats $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, respectivament.
El segment $\overline{EF}$ talla la diagonal $\overline{AC}$ en el punt M.
Les àrees dels quadrilàters BEFA i ECDF estan en proporció 1:2.
Si $\overline{AM}:\overline{MC}=1:3$, calculeu la mesura de $\overline{EM}$.
Shariguin I136.



Solució:
En aquestes condicions $B=C=60^o$.
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ADC}$ és equilàter. Per tant, $\overline{AC}=a$.
Com que $\overline{AM}:\overline{MC}=1:3$, aleshores, $\overline{AM}=\frac{a}{4}$, $\overline{CM}=\frac{3}{4}a$.
Els triangles $\overset{\Delta}{AFM}$, $\overset{\Delta}{CEM}$ són semblants i la raó de proporcionalitat és 1:3.
Siga $\overline{AF}=y$, aleshores, $\overline{CE}=3y$.
L'àrea del rombe ABCD és igual a l'àrea de dos triangles rectangles de costat a.

$$S_{ABCD}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2.$$

Com que les àrees dels quadrilàters BEFA i ECDF estan en proporció 1:2.
Aleshores, $S_{BEFA}=\frac{1}{3}S_{ABCD}$.

$$S_{BEFA}=S_{ABC}-S_{MEC}+S_{AFM}=S_{ABC}-9\cdot S_{AFM}+S_{AFM}=S_{ABC}-8\cdot S_{AFM}.$$

Aplicant la fórmula trigonomètrica de l'àrea:

$$S_{AFM}=\frac{y\frac{a}{4}\sin 60^o}{2}=\frac{\sqrt{3}}{16}ay.$$

$$S_{BEFA}=S_{ABC}-8\cdot S_{AFM}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{2}ay.$$

Aleshores,

$$S_{BEFA}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{2}ay=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a^2.$$

Simplificant:

$$S_{BEFA}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{2}ay=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a^2.$$

$$\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}y=\frac{1}{3}\frac{1}{2}a.$$

$$y=\frac{1}{6}a.$$

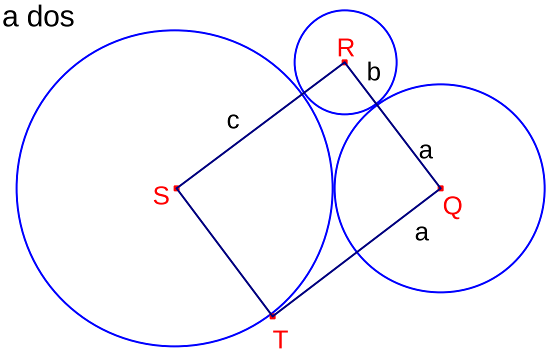
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CEM}$:

$$\overline{EM}^2=\left(\frac{3}{4}a\right)^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2-2\cdot\frac{3}{4}a\cdot\frac{1}{2}a\cdot\cos 60^o.$$

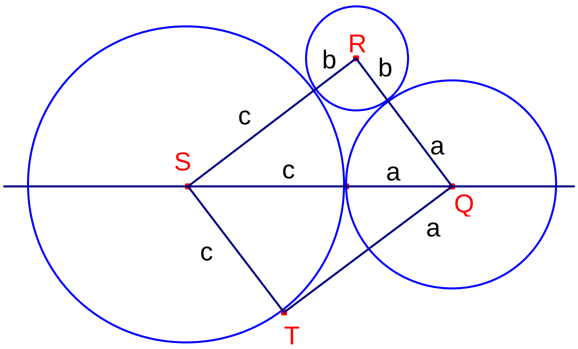
Simplificant:

$\overline{EM}^2=\frac{7}{16}a^2$. Aleshores, $\overline{EM}=\frac{\sqrt{7}}{4}a$.

3.- En la figura hi ha tres circumferències tangents dos a dos de radis a, b, c amb centres Q, R, S que formen un quadrat QRST on T és punt de tangència de la recta que passa per Q i és tangent a la circumferència de centre S.
Determineu la proporció $a:b:c$.



Solució:



$\overline{RS}=b+c$, $\overline{SQ}=a+c$, $\overline{QR}=a+b$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QRS}$:

$(a+c)^2=(a+b)^2+(b+c)^2$. Simplificant:

$2ac=2b^2+2b(a+c)$.

$ac=b(a+b+c)$ (1)

$\overline{ST}=\overline{QR}$:

$a+b=c$ (2)

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):

$a(a+b)=2b(a+b)$.

Simplificant:

$a=2b$ (3)

Aleshores, $a:b=2:1$ (4)

Substituint l'expressió (3) en l'expressió (2)

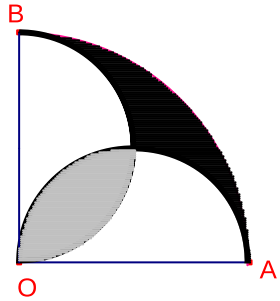
$a+\frac{1}{2}a=c$ (5)

$a=\frac{2}{3}c$ (6)

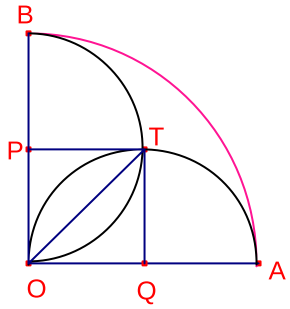
Aleshores: $a:c=2:3$ (7)

Aleshores, $a:b:c=2:1:3$.

4.- En la figura hi ha un quart de cercle de entre O i dues semicircumferències de diàmetres $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$.
Calculeu la raó de proporcionalitat entre la regió ombrejada de color gris i la regió ombrejada de color negre.



Solució:



Siguen P i Q els centres de les semicircumferències i T la seua intersecció.

L'àrea de color gris és el doble de l'àrea del segment circular de centre Q de radi $\overline{OQ}$ i abraça un quart de circumferència.

$$S_{gris}=2\left(\frac{1}{4}\pi\left(\frac{\overline{OA}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{OA}}{2}\right)^2\right)=\left(\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{4}\right)\overline{OA}^2.$$

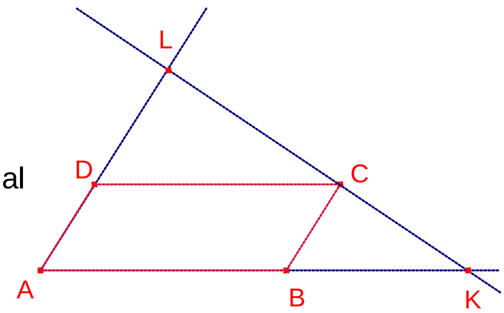
L'àrea de color negre és igual al sector format pel quart de cercle de centre O i rai $\overline{OA}$ menys dos quarts de cercle de centre Q i radi $\overline{OQ}$ menys un quadrat de costat $\overline{OQ}$.

$$S_{negre}=\frac{1}{4}\pi\overline{OA}^2-\left(2\cdot\left(\frac{1}{4}\pi\left(\frac{\overline{OA}}{2}\right)^2\right)-\left(\frac{\overline{OA}}{2}\right)^2\right)=\left(\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{4}\right)\overline{OA}^2.$$

Les àrees són iguals, per tant la proporció entre les àrees és 1.

5.- Siga el paral·lelogram ABCD. Una recta qualsevol que passa pel vèrtex C talla la recta AB i la recta AD en els punts K, L, respectivament.

Les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{KBC}$ i $\overset{\Delta}{CDL}$ són iguals a p, q, respectivament.
Determineu l'àrea del paral·lelogram ABCD.
Shariguin I200.



Solució:
Siga S l'àrea del paral·lelogram ABCD.
Siga $a=\overline{AB}$, $x=\overline{BK}$.

Dos triangles semblants les seues àrees són proporcionals al quadrat de la raó de semblança dels triangles.

Els triangles $\overset{\Delta}{DCL}$, $\overset{\Delta}{BKC}$ són semblants, aleshores:

$$\frac{q}{p}=\left(\frac{a}{x}\right)^2.$$

$$\frac{a}{x}=\sqrt{\frac{q}{p}}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{DCL}$, $\overset{\Delta}{AKL}$ són semblants, aleshores:

$$\frac{q}{q+p+S}=\left(\frac{a}{a+x}\right)^2.$$

$$\frac{q}{q+p+S}=\left(\frac{1}{1+\frac{x}{a}}\right)^2.$$

$$\frac{q}{q+p+S}=\left(\frac{1}{1+\sqrt{\frac{p}{q}}}\right)^2.$$

$$\frac{q}{q+p+S}=\left(\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}\right)^2.$$ Simplificant:

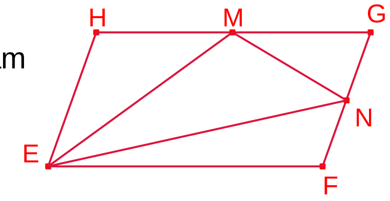
$$\frac{1}{q+p+S}=\frac{1}{p+q+2\sqrt{pq}}.$$

Aleshores, $S=2\sqrt{pq}$.

6.- Donat el paral·lelogram EFGH, siguen M el punt mig del costat $\overline{GH}$ i N el punt mig del costat $\overline{FG}$.

Si l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EMN}$ és 12, calculeu l'àrea del paral·lelogram EFGH.

Solució:
Siga S l'àrea del paral·lelogram EFGH.



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EFN}$ és la quarta part de l'àrea del paral·lelogram EFGH ja que tenen la mateixa base $\overline{EF}$ i l'altura del triangle és la meitat de l'altura del paral·lelogram sobre el costat $\overline{EF}$.

Anàlogament l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EHM}$ és la quarta part de l'àrea del paral·lelogram EFGH.

Anàlogament l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{GMN}$ és la vuitena part de l'àrea del paral·lelogram EFGH.

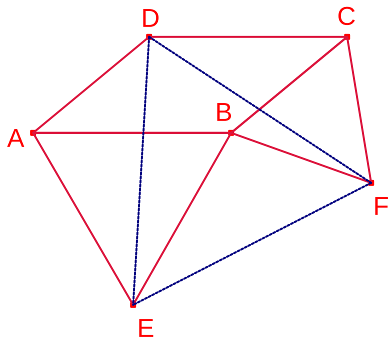
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{EMN}$ és $\frac{3}{8}$ de l'àrea del paral·lelogram EFGH.

$\frac{3}{8}S = 12$.

Aleshores, $S = 32$.

7.- Sobre els costats $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ del paral·lelogram ABCD és dibuixen fora del paral·lelogram triangles equilàters, els seus vèrtexs són E i F respectivament. Proveu que $\angle EFD = 60^o$.

KöMal, febrer 2011. B4336.



Solució:

Siga $\alpha = \angle DAB$, angle del paral·lelogram.

$\angle DCF = 60^o + \alpha$.

$\angle EBF = 360^o - (\angle ABC + 120^o) = 360^o - (180^o - \alpha + 120^o) = 60^o + \alpha$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{DCF}$, $\overset{\Delta}{EBF}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{EF} = \overline{DF}$.

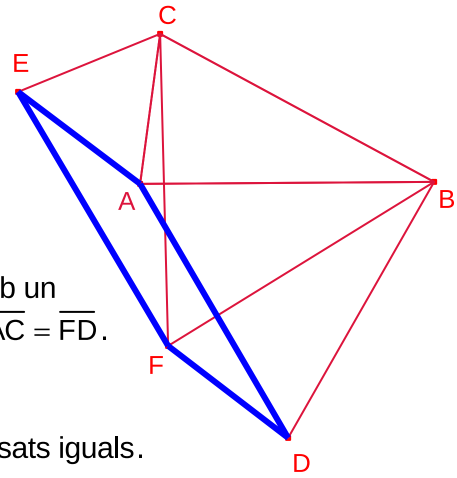
$\angle DAE = 60^o + \alpha$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{EAD}$, $\overset{\Delta}{EBF}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{EF} = \overline{DE}$.

Per tant, el triangle $\overset{\Delta}{DEF}$ és equilàter, aleshores, $\angle EFD = 60^o$.

8.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Construïm un triangle equilàter $\overset{\Delta}{BAD}$ sobre el costat $\overline{AB}$, amb D i C en distints semiplànols respecte a $\overline{AB}$. Construïm un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ACE}$ sobre el costat $\overline{AC}$, amb B i E en distints semiplànols respecte a $\overline{AC}$. Construïm el triangle equilàter $\overset{\Delta}{BCF}$ sobre el costat $\overline{BC}$, amb F i A en el mateix semiplànol respecte a $\overline{BC}$.
Demostreu que el quadrilàter AEFD és un paral·lelogram.

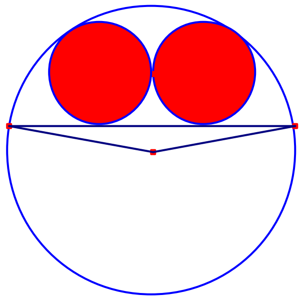


Solució:

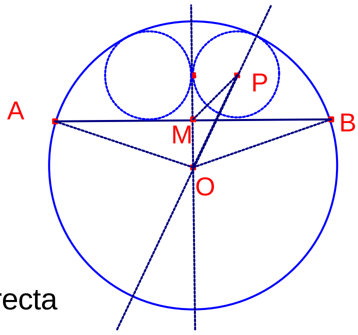
Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{FBD}$, són iguals $\overline{CA}=\overline{CE}$, $\overline{CB}=\overline{CF}$,i amb un gir de centre C de 60º, transforma B en F i A en E, per tant, $\overline{AB}=\overline{EF}$.
Aleshores, $\overline{EF}=\overline{AB}=\overline{AD}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{EFC}$, són iguals $\overline{AC}=\overline{BD}$, $\overline{BC}=\overline{BF}$,i amb un gir de centre B de 60º, transforma C en F i A en D, per tant, $\overline{AC}=\overline{FD}$.
Aleshores, $\overline{AC}=\overline{FD}=\overline{AE}$.
Per tant, $\overline{EF}=\overline{AD}$ i $\overline{FD}=\overline{AE}$.
Per tant, AEFD és un paral·lelogram ja que té els costats oposats iguals.

9.- En el segment circular d'una circumferència de radi R i angle central α, $\alpha < \pi$ s'han inscrit dues circumferències iguals , tangents entre si. Determineu els radis d'ambdues circumferències.
Gúsiev 211.

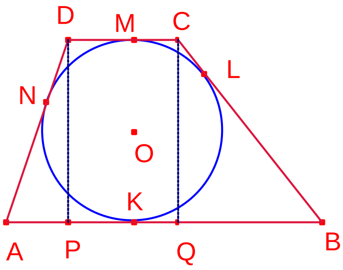


Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi R.
Siga la corda $\overline{AB}$ tal que $\alpha = \angle AOB$
Siga M el punt mig de la corda $\overline{AB}$.
Per ser les dues circumferències iguals i tangents entre elles, la mediatriu al segment $\overline{AB}$ és la tangent a les dues circumferències.
Siga la circumferència de centre P i siga r el seu radi.
Per ser aquesta circumferència tangent a les rectes OM , AB, la recta MP és bisectriu de les dues rectes.



$\overline{MP} = r\sqrt{2}$.
$\angle PMO = 135^o$.
Per ser les circumferències de centres O i P, tangents interiors, $\overline{OP} = R - r$.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$:
$\overline{OM} = R \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$.
Considerem el triangle $\overset{\Delta}{OMP}$.
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{OMP}$:
$\overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MP}^2 - 2 \cdot \overline{OM} \cdot \overline{MP} \cdot \cos 135^o$.
$(R-r)^2 = R^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2r^2 + 2R \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot r\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Simplificant:
$r^2 + 2R\left(1 + \cos\frac{\alpha}{2}\right)r - R^2 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} = 0$.
Resolent l'equació en la incògnita r:
$r = -1 - \cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2 + 2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

10.- En un trapezi d'angles aguts α, β està inscrit un cercle de radi.
Determineu la proporció entre les àrees del trapezi i del cercle.
Gúsiev 263.



Solució:
Siga ABCD el trapezi de costats paral·lels $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.
Siga $\alpha = \angle DAB$, $\beta = \angle ABC$ angles aguts del trapezi.
Siga el cercle de centre O i radi r tangent al trapezi ABCD en els punts K, L, M, N.
Siga $x = \overline{DM} = \overline{DN}$, $y = \overline{AN} = \overline{AK}$, $z = \overline{BK} = \overline{BL}$, $t = \overline{CL} = \overline{CM}$.
L'altura del trapezi és $\overline{MN} = 2r$.

L'àrea del trapezi és:
$$S_{ABCD} = \frac{x+y+z+t}{2}2r.$$
$$S_{ABCD} = (x+y+z+t)r.$$
Siga P la projecció de D sobre el costat $\overline{AB}$. Siga Q la projecció de C sobre el costat $\overline{AB}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APD}$:
$$\frac{2r}{x+y} = \sin\alpha, \text{ aleshores, } x+y = \frac{2r}{\sin\alpha}.$$
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BQC}$:
$$\frac{2r}{z+t} = \sin\beta, \text{ aleshores, } z+t = \frac{2r}{\sin\beta}.$$
$$x+y+z+t = \left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right)2r.$$
$$S_{ABCD} = (x+y+z+t)r = \left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right)2r^2.$$
L'àrea del cercle de radi r és:
$$S_{cercle} = \pi r^2.$$
La proporció entre les àrees del trapezi i del cercle és:
$$\frac{S_{ABCD}}{S_{cercle}} = \frac{\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right)2r^2}{\pi r^2} = \frac{2(\sin\alpha + \sin\beta)}{\pi \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}.$$