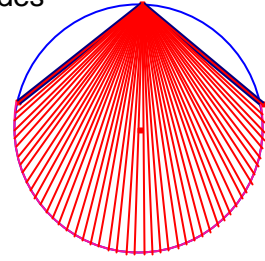


### Problemes Geometria 34

1.- Des d'un punt d'una circumferència de radi  $R$  es tracen dues cordes iguals.

Si l'angle de les cordes és  $\alpha$  determineu l'àrea de la part del cercle continguda entre les dues cordes.

*Gúsiev 287.*



Solució:

Siga la circumferència de centre  $O$  i radi  $R$ .

Siga  $A$  un punt de la circumferència i siguin les cordes  $\overline{AB} = \overline{AC}$ .

Siga  $\alpha = \angle BAC$  (en radians) angle inscrit en la circumferència.

$\overline{AO}$  és bisectriu de l'angle  $\angle BAC$ .

Per ser angle inscrit,  $\angle BOC = 2\alpha$ .

Els triangles  $\triangle AOC$ ,  $\triangle BOA$  són iguals i isòsceles

L'àrea ombrada, formada per la part del cercle continguda entre les dues cordes és igual a l'àrea del sector circular de centre  $O$  i arc  $2\alpha$

més el doble de l'àrea dels triangle isòsceles  $\triangle AOC$ .

$$\angle AOC = 180^\circ - \frac{2\alpha}{2} = 180^\circ - \alpha.$$

L'àrea del sector de centre  $O$  i arc  $2\alpha$  és:

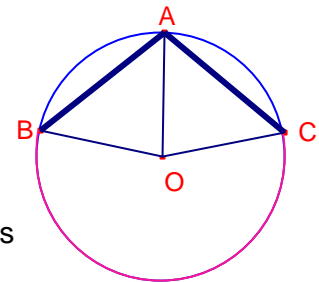
$$S_{\text{sector}} = \alpha \cdot \pi \cdot R^2.$$

L'àrea del triangle del triangle  $\triangle AOC$  és:

$$S_{\triangle AOC} = \frac{R^2 \sin(180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{\sin \alpha}{2} R^2.$$

L'àrea ombrada és:

$$S_{\text{ombrada}} = \alpha \cdot \pi \cdot R^2 + 2 \left( \frac{\sin \alpha}{2} R^2 \right) = (\alpha \cdot \pi + \sin \alpha) R^2.$$



2.- Els punts  $A(3, 6)$ ,  $B(4, 6)$ ,  $C(4, 8)$  es reflecteixen respecte de la recta  $3x + 4y - 50 = 0$  i formen 3 vèrtexs d'un paral·lelogram. Determineu les coordenades del vèrtex  $P$  del paral·lelogram sabent que és el més allunyat, dels paral·lelograms possibles, de l'origen de coordenades.

Solució:

El paral·lelogram que formen els punts  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i que té coordenades més pròximes a l'origen de coordenades té el quart vèrtex  $D$  en el punt  $D(3,4)$ .

Aquest punt al reflectir-lo sobre la recta  $3x + 4y - 50 = 0$  donarà el paral·lelogram de vèrtex més allunyat de l'origen de coordenades.

Calculem el punt simètric de  $D$  respecte de la recta  $3x + 4y - 50 = 0$ .

La recta perpendicular a la recta  $3x + 4y - 50 = 0$  que passa pel punt  $D$  té equació:

$$y - 4 = \frac{4}{3}(x - 3) \text{ . Simplificant.}$$

$$4x - 3y = 0 \text{ .}$$

La intersecció de les dues rectes en dona el punt projecció  $T$ .

$$\begin{cases} 3x + 4y = 50 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases}$$

Resolent el sistema:  $\begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases}$

Les coordenades de  $T$  són  $T(6,8)$ .

Determinem les coordenades de  $P$ .

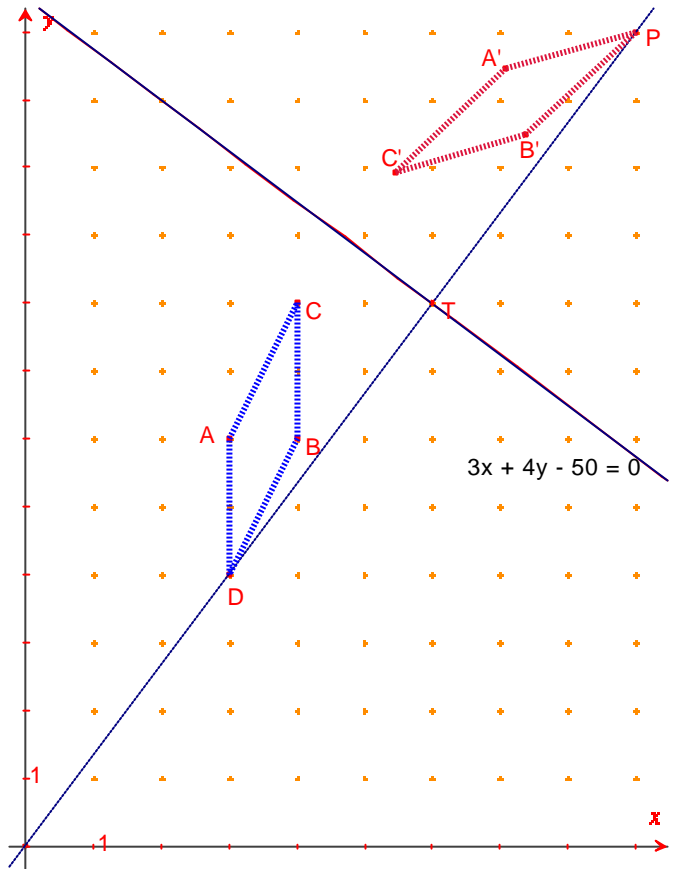
Siga  $P(x,y)$

$$\vec{DT} = \vec{TP}$$

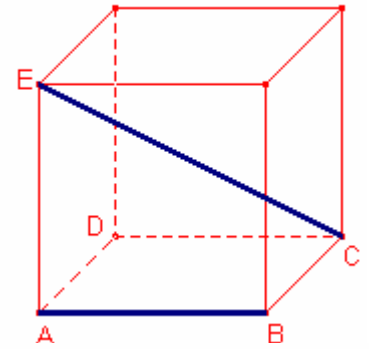
$(3, 4) = (x - 6, y - 8)$ , igualant les components dels vectors:

$$\begin{cases} x - 6 = 3 \\ y - 8 = 4 \end{cases} \text{ . Resolent el sistema } \begin{cases} x = 9 \\ y = 12 \end{cases}$$

Les coordenades de  $P$  són  $P(9, 12)$ .



3.- En un cub d'aresta 1, determineu la distància entre l'aresta  $\overline{AB}$  i la diagonal  $\overline{CE}$  de la figura.  
*Kömal C1074.*



Solució 1:

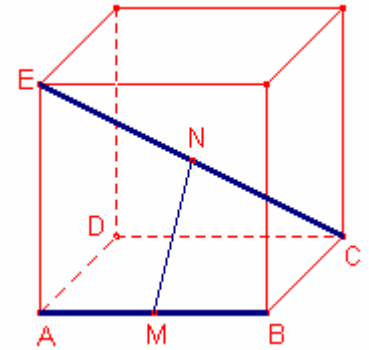
Considerem el sistema de referència cartesià  $\{A(0,0,0), \overrightarrow{AB} = (1,0,0), \overrightarrow{AD} = (0,1,0), \overrightarrow{AE} = (0,0,1)\}$ .

Les components del vector  $\overrightarrow{CE} = (-1,-1,1)$ .

Les coordenades de C són:

$C(1,1,0)$ .

Determinem la perpendicular comuna a les rectes AB, CE i vegem que aquesta perpendicular comuna talla els segments  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CE}$ .



Siga M un punt qualsevol de la recta AB, les seues coordenades són:  
 $M(\alpha,0,0)$ .

Siga N un punt qualsevol de la recta CE, les seues coordenades són:  
 $N(1-\beta,1-\beta,\beta)$ .

$\overrightarrow{MN} = (1-\beta-\alpha,1-\beta,\beta)$ .

Si la recta MN és perpendicular a les rectes AB, CE,  $\overrightarrow{MN}$  és perpendicular a  $\overrightarrow{AB}$  i a  $\overrightarrow{CE}$ .

Aleshores,  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ ,  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$ .

$$\begin{cases} 1-\beta-\alpha = 0 \\ -1+\beta+\alpha-1+\beta+\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + 3\beta = 2 \end{cases} \text{ . Resolent el sistema: } \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases} .$$

Aleshores,  $M\left(\frac{1}{2},0,0\right) \in \overline{AB}$ , és el seu punt mig.

$N\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \in \overline{CE}$ , és el seu punt mig.

$$d(\overline{AB}, \overline{CE}) = d(M,N) = \|\overrightarrow{MN}\| = \left\| \left( 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\| = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Solució 2:

Siga M un punt del segment  $\overline{AB}$ , tal que  $x = \overline{AM}$ .

Siga N un punt del segment  $\overline{CE}$ , tal que  $y = \overline{CN}$ .

La mínima distància serà la menor de les distàncies tal que  $\overline{MN}$  siga perpendicular a  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CE}$ , respectivament.

$$\overline{CE} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle MBC$ :

$$\overline{MC}^2 = (1-x)^2 + 1^2 = x^2 - 2x + 2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle MAE$ :

$$\overline{ME}^2 = x^2 + 1^2 = x^2 + 1.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle MNC$ :

$$\overline{MN}^2 = \overline{MC}^2 - \overline{CN}^2 = x^2 - 2x + 2 - y^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle MNE$ :

$$\overline{MN}^2 = \overline{ME}^2 - \overline{EN}^2 = x^2 + 1 - (\sqrt{3} - y)^2.$$

Igualant ambdues expressions:

$$x^2 - 2x + 2 - y^2 = x^2 + 1 - (\sqrt{3} - y)^2. \text{ Simplificant:}$$

$$x = 2 - y\sqrt{3}.$$

$$\text{Aleshores, } \overline{MN}^2 = x^2 - 2x + 2 - y^2 = 2y^2 - 2\sqrt{3}y + 2.$$

Considerem la funció:  $f(y) = 2y^2 - 2\sqrt{3}y + 2$ .

$$f(y) = 2 \left( \left( y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right).$$

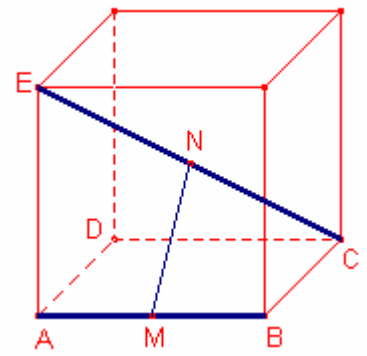
La funció té un mínim quan  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

El valor mínim de  $\overline{MN}^2$  és:

$$\overline{MN}^2 = 2 \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

La distància entre l'aresta  $\overline{AB}$  i la diagonal  $\overline{CE}$  és:

$$\overline{MN} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



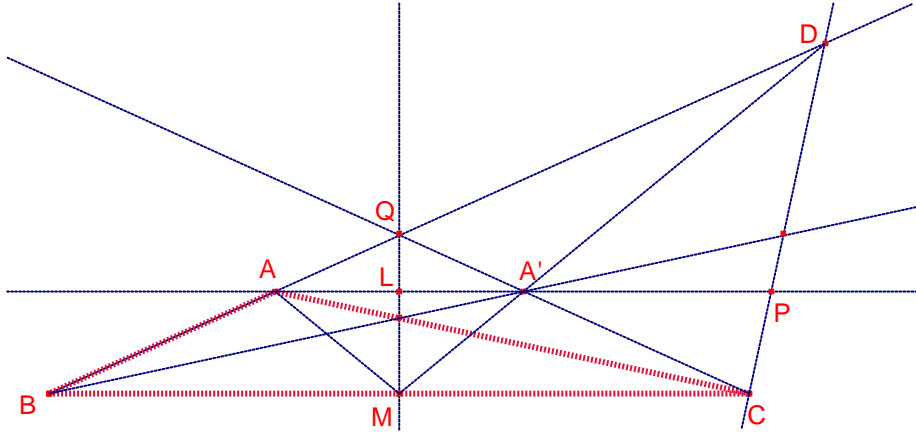
4.- Siga  $\triangle ABC$  el triangle tal que  $B = 2C$  i  $A > 90^\circ$ .

Siguen D el punt de la recta AB tal que  $\overline{CD}$  és perpendicular a  $\overline{AC}$  i M el punt mig del costat  $\overline{BC}$ .

Demostreu que  $\angle BMA = \angle DMC$ .

*Olimpiada Espanyola 2011 problema 4.*

Solució:



Siga  $C = \alpha$ ,  $B = 2\alpha$ .

Siga M el punt mig del costat  $\overline{BC}$ .

La mediatriu al costat  $\overline{BC}$  talla la prolongació del costat  $\overline{AB}$ .

El triangle  $\triangle BCQ$  és isòsceles.

La bisectriu del vèrtex B talla la recta CQ en el punt A', que és simètric de A respecte de la mediatriu del segment  $\overline{BC}$ .

$\overline{AA'}$  és paral·lel a  $\overline{BC}$ .

$\angle BA'A = \alpha$ , aleshores,  $\overline{AA'} = \overline{AB}$ .

La recta  $\overline{AA'}$  talla la recta CD en el punt P.

$\angle A'CD = 90 - \alpha$ ,  $\angle AA'Q = 2\alpha$ , aleshores,  $\angle A'PC = 90^\circ - \alpha$ .

Aleshores, el triangle  $\triangle CA'P$  és isòsceles, per tant,

$\overline{AC'} = \overline{A'P} = \overline{AB}$ .

Aleshores,  $\overline{AA'} = \overline{A'P}$ .

La recta DM és mitjana del triangle  $\triangle BCD$  i mitjana del semblant  $\triangle APD$ .

Aleshores, A' pertany al segment  $\overline{DM}$ .

Com que el punt A és simètric de A' respecte de la mediatriu del costat  $\overline{BC}$ :

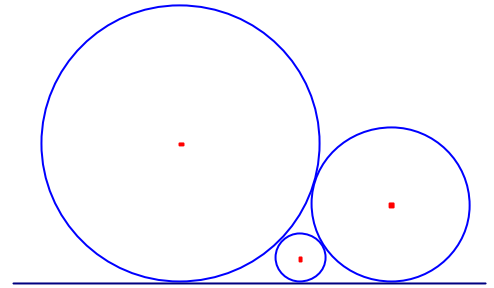
$\angle BMA = \angle CMA' = \angle DMC$ .

5.- Tres circumferències són tangents dos a dos i les tres són tangents a una recta.

Si els radis de les circumferències són  $a, b, c$ ,  $c$  la de menor radi.

Demostreu que s'acompleix  $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$ .

UKMT "MacLaurin" 2011. Problema 5.



Solució:

Siguen  $A, B, C$  els centres de les circumferències de radis  $a, b, c$ .

Siguen  $P, Q, R$  els punts de tangència de les tres circumferències amb la recta.

$\overline{AB} = a + b$ ,  $\overline{AC} = a + c$ ,  $\overline{BC} = b + c$ .

$\overline{AP} = a$ ,  $\overline{BQ} = b$ ,  $\overline{CR} = c$

Siga la recta  $LM$  paral·lela a la recta que passa per  $C$ .

Siga la recta  $KM$  paral·lela a la recta que passa per  $B$ .

Siga  $x = \overline{RQ}$ ,  $y = \overline{RP}$ .

$\overline{AL} = a - c$ ,  $\overline{BM} = b - c$ ,  $\overline{AK} = a - b$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle

$\triangle CMB$ :

$$x = \sqrt{(b+c)^2 - (b-c)^2} = 2\sqrt{bc}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle CLA$ :

$$y = 2\sqrt{ac}.$$

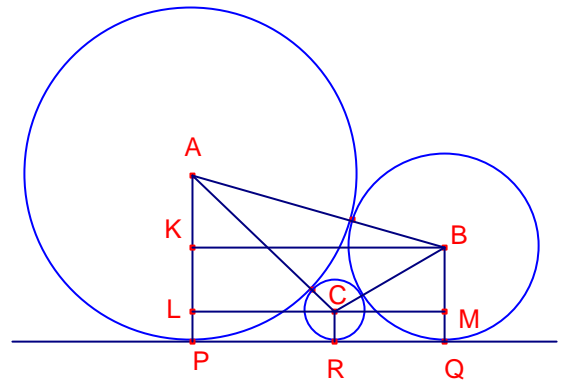
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle BKA$ :

$$x + y = 2\sqrt{ab}.$$

Aleshores,  $2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac} = 2\sqrt{ab}$ .

Dividint l'expressió per  $2\sqrt{abc}$ .

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{c}}.$$



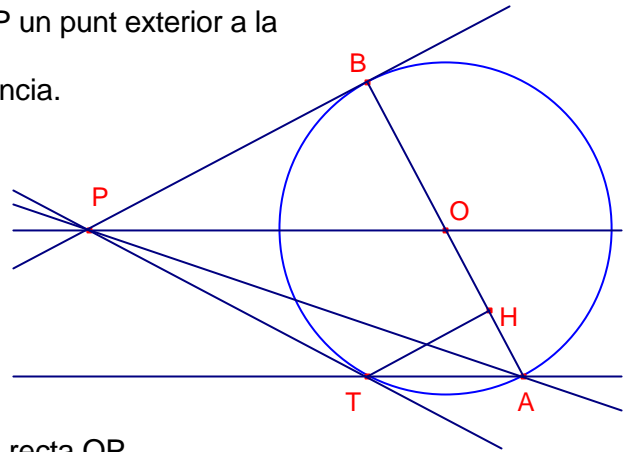
6.- Siga una circumferència de centre O i siga P un punt exterior a la circumferència.

Siguen PB i PT rectes tangents a la circumferència.

Siga  $\overline{AB}$  diàmetre de la circumferència.

a) Demostreu que la recta AT és paral·lela a la recta OP.

b) Si H és la projecció de T sobre el diàmetre  $\overline{AB}$ , demostreu que la recta PA divideix per la meitat el segment  $\overline{TH}$ .



Solució:

a)

Notem que T és el simètric de B respecte de la recta OP.

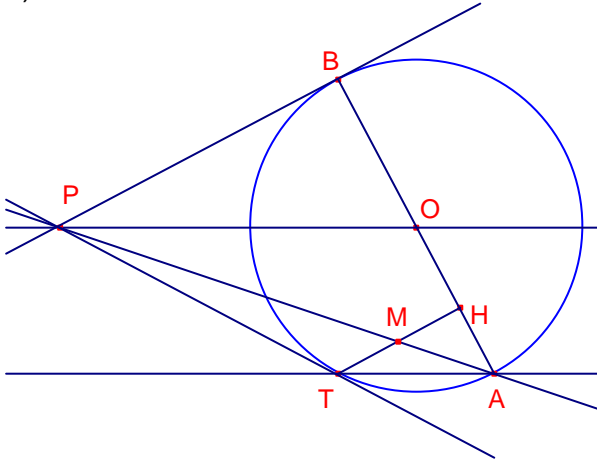
$\overline{BT}$  és perpendicular a la recta OP.

Els triangles rectangles  $\triangle POB$ ,  $\triangle BAT$  són semblants. Aleshores:

$$\angle POB = \angle TAB.$$

Aleshores, les rectes AT, OP són paral·leles.

b)



Siga M la intersecció de la recta PA i el segment  $\overline{TH}$ .

Les rectes PB i TH són paral·leles ja que ambdues són perpendiculars al diàmetre  $\overline{AB}$ .

Els triangles  $\triangle PAB$ ,  $\triangle MAH$  estan en posició de Tales. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{MH}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{AB}} \quad (1)$$

Els triangles rectangles  $\triangle PBO$ ,  $\triangle THA$  són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{TH}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{AB}} \quad (2)$$

Dividint les expressions (1) (2):

$$\frac{\overline{MH}}{\overline{TH}} = \frac{1}{2}.$$

Aleshores,  $\overline{TH} = 2 \cdot \overline{MH}$ , per tant la recta PA divideix per la meitat el segment  $\overline{TH}$ .

7.- Calculeu el radi d'una circumferència en què els dos costats d'un angle de magnitud  $\alpha$  talla amb cordes de longitud  $a$ , si sabem que la distància entre els extrems més pròxims d'aquestes cordes és igual a  $b$ .  
*Shariguin 1108.*

Solució:

Siga l'angle  $\angle BOD = \alpha$  que talla la circumferència de centre  $P$  en les cordes  $\overline{AB} = \overline{CD} = a$  i  $\overline{AC} = b$ .

Siga  $r = \overline{PA}$  radi de la circumferència.

Notem que el centre  $P$  pertany a la bisectriu de l'angle  $\angle BOD = \alpha$  per ser les dues cordes iguals.

Siga  $M$  el punt mig de la corda  $\overline{AB}$ .

Siga  $x = \overline{OA}$ .

Aplicant el teorema dels sinus al triangle  $\triangle OAC$ :

$$\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{x}{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}. \text{ Simplificant:}$$

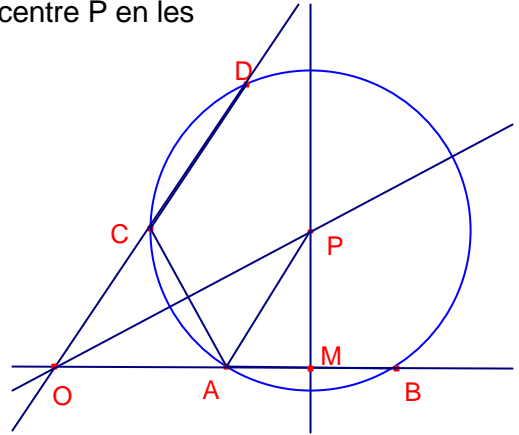
$$x = \frac{b}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle  $\triangle OMP$ :

$$\overline{PM} = \frac{1}{2} \left( a + \frac{b}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \left( a \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + b \right).$$

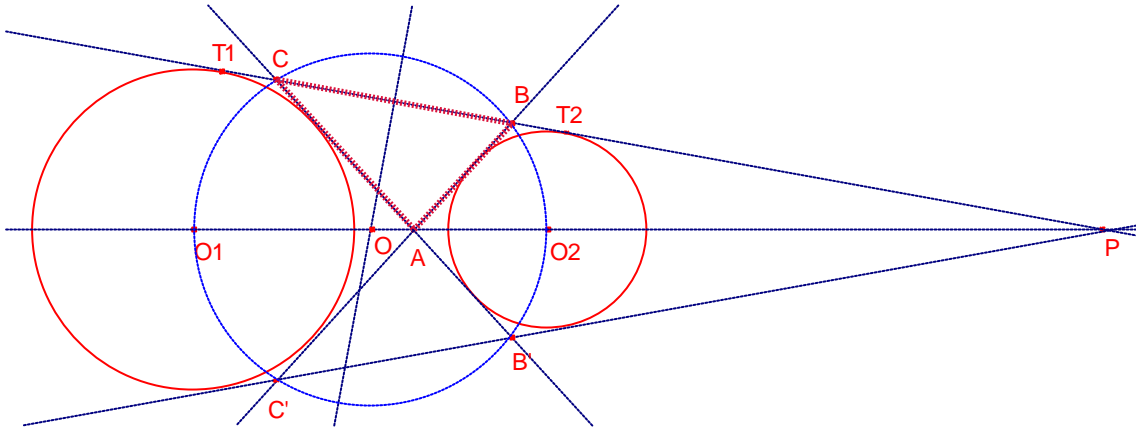
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle AMP$ :

$$r = \sqrt{\left( \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} (a \cdot \sin \alpha + b) \right)^2 + \left( \frac{a}{2} \right)^2} = \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \left( a^2 + b^2 + 2ab \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$



8.- La distància entre els centres de dues circumferències que no es tallen és igual a  $a$ . Demostreu que els quatre punts d'intersecció de les tangents exteriors amb les tangents interiors es troben en una circumferència. Determineu el radi de la circumferència. *Shariguin 1141.*

Solució.



Siga la circumferència de centre  $O_1$  i la circumferència de centre  $O_2$ .  $\overline{O_1O_2} = a$ .

Siga  $T_1$  el punt de tangència exterior de la de la circumferència de centre  $O_1$ .

Siga  $T_2$  el punt de tangència exterior de la de la circumferència de centre  $O_2$ .

Siga  $A$  la intersecció de les dues tangents interiors.

Siguen  $B$ ,  $C$  i  $B'$ ,  $C'$  els quatre punts.

$B'$  és simètric de  $B$  respecte de la recta que uneix els centres de les dues circumferències.

$C'$  és simètric de  $C$  respecte de la recta que uneix els centres de les dues circumferències.

Aleshores els 4 punts estan en una circumferència el centre és la intersecció de la recta que uneix els centres i la mediatriu del segment  $\overline{BC}$ .

Siga  $O$  el centre de la circumferència que passa per  $B$ ,  $C$ ,  $B'$ ,  $C'$ .

Considerem el triangle  $\triangle ABC$ .

La circumferència de centre  $O_1$  és una circumferència exinscrita al triangle  $\triangle ABC$  ja que és tangent exterior als tres costats.

La circumferència de centre  $O_2$  és una circumferència exinscrita al triangle  $\triangle ABC$  ja que és tangent exterior als tres costats.

$\overline{BT_1} = \overline{CT_2}$  igual al semiperímetre del triangle  $\triangle ABC$ .

Aleshores,  $\overline{CT_1} = \overline{BT_2}$ . Aleshores, la mediatriu del segment  $\overline{BC}$  és mediatriu del segment  $\overline{T_1T_2}$ .

Aleshores, la mediatriu del segment  $\overline{BC}$  és paral·lela mitjana de les rectes paral·leles  $T_1O_1$ ,  $T_2O_2$ .

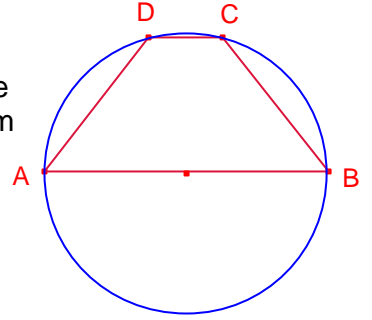
Aleshores,  $O$  és el punt mig del segment  $\overline{O_1O_2} = a$ .

Aleshores el radi de la circumferència que passa pels 4 punts és  $\frac{a}{2}$ .

9.- Determineu el radi de la circumferència mínima en què està inscrit un trapezi isòsceles, les bases del qual són 15 i 4 i els costats iguals mesuren 9.  
*Shrigin 1145.*

Solució:

Un trapezi isòsceles sempre està inscrit en una circumferència ja que els angles oposats són iguals. Aquesta circumferència és la de mínim radi.



Siga el trapezi ABCD,  $\overline{AB} = 15$ ,  $\overline{CD} = 4$ ,  $\overline{AD} = \overline{BC} = 9$ .

Aplicant el teorema de Tolomeu al quadrilàter inscrit ABCD:

$$15 \cdot 4 + 9 \cdot 9 = \overline{AC}^2. \text{ Aleshores, } \overline{AC} = \sqrt{141}.$$

La circumferència circumscriba al trapezi és igual a la circumscriba al triangle  $\triangle ABC$ .

L'àrea del triangle  $\triangle ABC$  és:

$S_{ABC} = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$  on R és el radi de la circumferència circumscriba.

$$\frac{9 \cdot 15 \cdot \sqrt{141}}{4R} = \frac{1}{4} \sqrt{(24 + \sqrt{141})(24 - \sqrt{141})(\sqrt{141} + 6)(\sqrt{141} - 6)}.$$

Resolent l'equació:

$$R = \frac{9\sqrt{141}}{\sqrt{203}}.$$

10.- Siga el rectangle ABCD  $\overline{AB} = 9$ ,  $\overline{BC} = 7$ .

Siga M un punt del costat  $\overline{CD}$  tal que  $\overline{CM} = 3$ .

Siga N un punt del costat  $\overline{AD}$  tal que  $\overline{AN} = 2\sqrt{5}$ .

Determineu el radi de la circumferència màxima que s'inscriu en el pentàgon ABCMN.

*Shariguin 1146.*

Solució:

Les rectes AB i MN s'intersecten en el punt P.

Les rectes BC i MN s'intersecten en el punt Q.

La circumferència màxima és la màxima entre les circumferències: inscrita al triangle

$\triangle PBQ$ , exinscrita i tangent al segment  $\overline{AN}$  del triangle  $\triangle PAN$ , o exinscrita i tangent al

segment  $\overline{CM}$  del triangle  $\triangle MCQ$ .

La de major radi és la primera.

Calculem el seu radi.

$$\overline{DM} = 6, \overline{DN} = \frac{9}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle MDN$ .

$$\overline{MN} = \frac{15}{2}$$

Els triangles  $\triangle MDN$ ,  $\triangle PAN$ , són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{PA} = \frac{10}{3}, \overline{PN} = \frac{25}{6}.$$

Els triangles  $\triangle MDN$ ,  $\triangle MCQ$ , són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{CQ} = \frac{9}{4}, \overline{QM} = \frac{15}{4}.$$

$$\overline{PQ} = \frac{185}{12}, \overline{PB} = \frac{37}{3}, \overline{BQ} = \frac{37}{4}.$$

El radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle  $\triangle PBQ$  és:

$$r = \frac{\overline{PB} + \overline{BQ} - \overline{PQ}}{2} = \frac{37}{12}.$$

