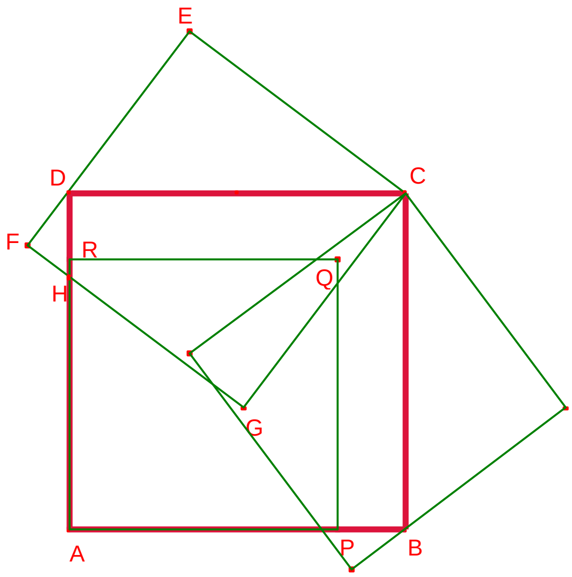
Problemes Geometria 35

1.- Es possible recobrir un quadrat de costat $\frac{5}{4}$ amb 3 quadrat de costat 1.

Shariguin II358.



Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat $\frac{5}{4}$.

Siga APQR el primer quadrat que posem de costat 1.

$DR = \frac{1}{4}$.

Vegem que el quadrat CEFG de costat 1 tal que D pertany al costat $\overline{EF}$ recobreix el trapezi RQCD.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CED}$:

$\overline{DE} = \frac{3}{4}$.

Aleshores, $\overline{DF} = \frac{1}{4}$.

$\overline{DH}$ els la hipotenusa del triangle rectangle $\overset{\Delta}{DFH}$, aleshores, $\overline{DH} > \overline{DF} = \frac{1}{4}$.

Aleshores, R pertany al quadrat CEFG.

$\overline{CQ} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$, $\angle DCQ = 45^o$.

$\angle DCE = \arccos\frac{1}{\frac{5}{4}} \approx 36^o52'$.

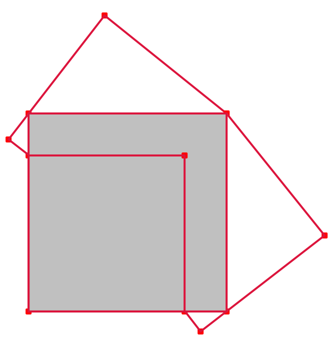
$\angle DCG > 45^o$, $\overline{CG} = 1$.

Aleshores, Q pertany a l'interior del quadrat CEFG.

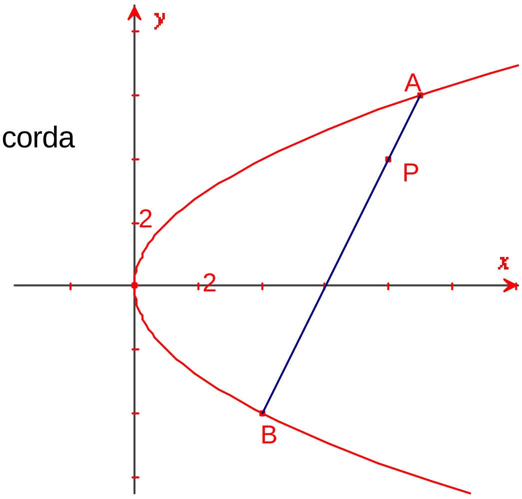
El tercer quadrat és el simètric del quadrat CEFG respecte de la diagonal $\overline{AC}$.

El costat del màxim quadrat recobert per 3 quadrats de costat 1 és $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Estudiat per Dudeney en 1931.



2.- El punt $P(8,4)$ divideix una corda de la paràbola $y^2 = 4x$ en la raó 1:4.
Determineu els punts extrems de la corda.
KóMaL, C1074. Maig 2011.



Solució:
Siguen $A(a,b)$, $B(c,d)$ punts de la paràbola i $P(8,4)$ de la corda tal que la divideix en la raó 1:4.
Per ser punts de la paràbola:

$b^2 = 4a$ (1)

$d^2 = 4c$ (2)

Suposem sense perdre generalitat que $4\cdot\overline{AP} = \overline{BP}$.

$5\cdot\overline{AP} = \overline{AB}$.

Aleshores:

$5(8-a) = c-a$ (3)

$5(4-b) = d-b$ (4)

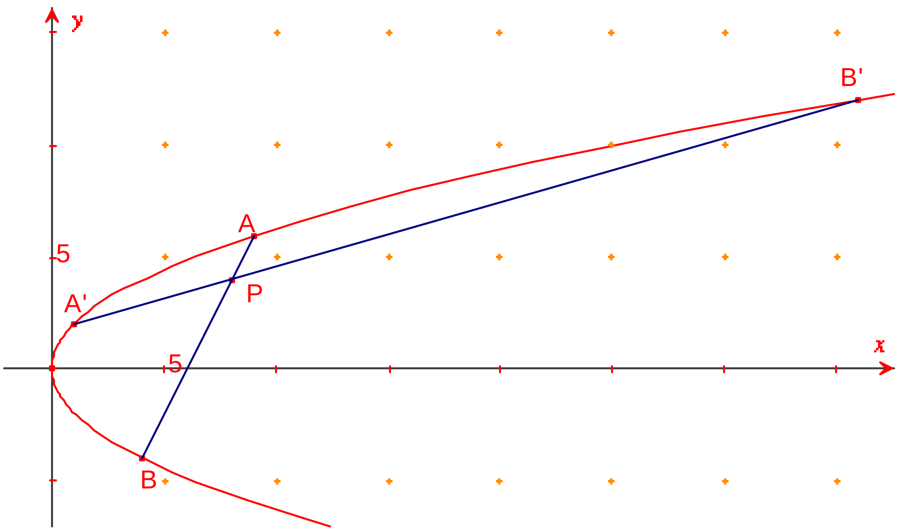
Considerem el sistema format per les expressions (1), (2), (3), (4):

$\begin{cases} b^2 = 4a \\ d^2 = 4c \\ c = 40-4a \\ d = 20-4b \end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases} a = 9 \\ b = 6 \\ c = 4 \\ d = -4 \end{cases}$, $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 36 \\ d = 12 \end{cases}$.

Aleshores, té dues solucions

La corda $\overline{AB}$ d'extrems $A(9,6)$, $B(4,-4)$.

La corda $\overline{A'B'}$ d'extrems $A'(1,2)$, $B'(36,12)$.



3.- Proveu que si $x^2+9y^2-4x-24y+16=0$, aleshores, $2\le 3(x+y)\le 18$.
Concurs Nacional Rumania 2011. Junior. PJ42-3

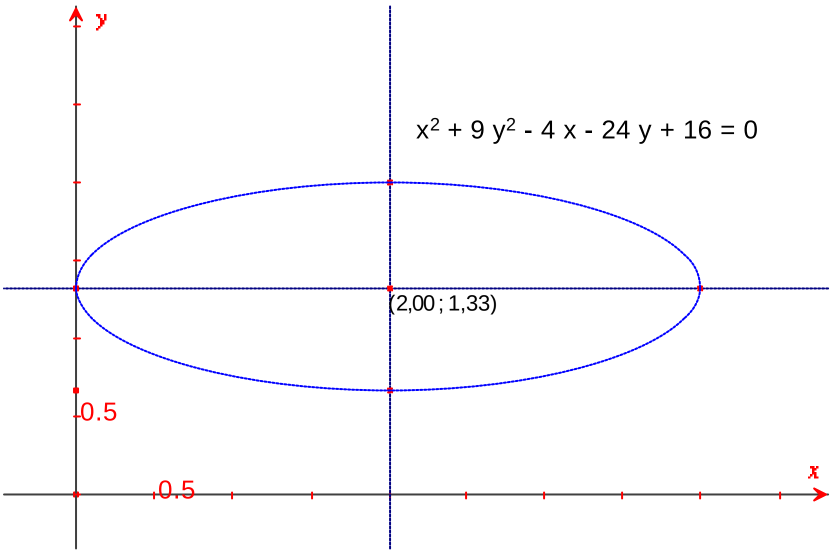
Solució:
$x^2+9y^2-4x-24y+16=0$ és una el·lipse. Determinem la seua equació reduïda:

$$\frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{\left(y-\frac{4}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=1.$$

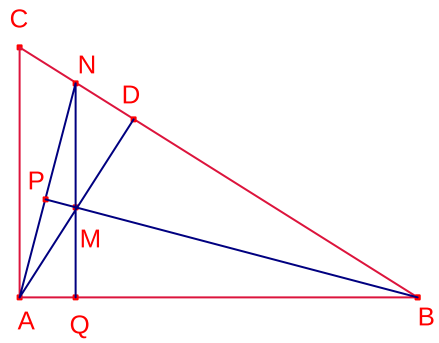
És una el·lipse de centre $(m,n)=\left(2,\frac{4}{3}\right)$ i semieix major $a=2$, semieix menor $b=\frac{2}{3}$, semidistància focal $c=\sqrt{2^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$, excentricitat $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Siga (x,y) un punt de l'el·lipse, aleshores:
$|x-m|\le a$.
$|y-n|\le b$.

$-2\le x-2\le 2$.
$-\frac{2}{3}\le y-\frac{4}{3}\le\frac{2}{3}$.
Sumant les dues desigualtats:
$-\frac{8}{3}\le x+y-\frac{10}{3}\le\frac{8}{3}$.
Sumant $\frac{10}{3}$ als membres de la desigualtat:
$\frac{2}{3}\le x+y\le\frac{18}{3}$.
Multiplicant per 3 els membres de les desigualtats:
$2\le 3(x+y)\le 18$.



4.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^{o}$, siga D un punt de la hipotenusa $\overline{BC}$.
Siga M el punt mig del segment $\overline{AD}$ i N el punt mig del segment $\overline{CD}$.
Si $\angle ABM = \angle CAN$ proveu que $\overline{AD}$ és perpendicular a $\overline{BC}$.
Olimpíada Rumania 2011. Junior. PJ42-5.



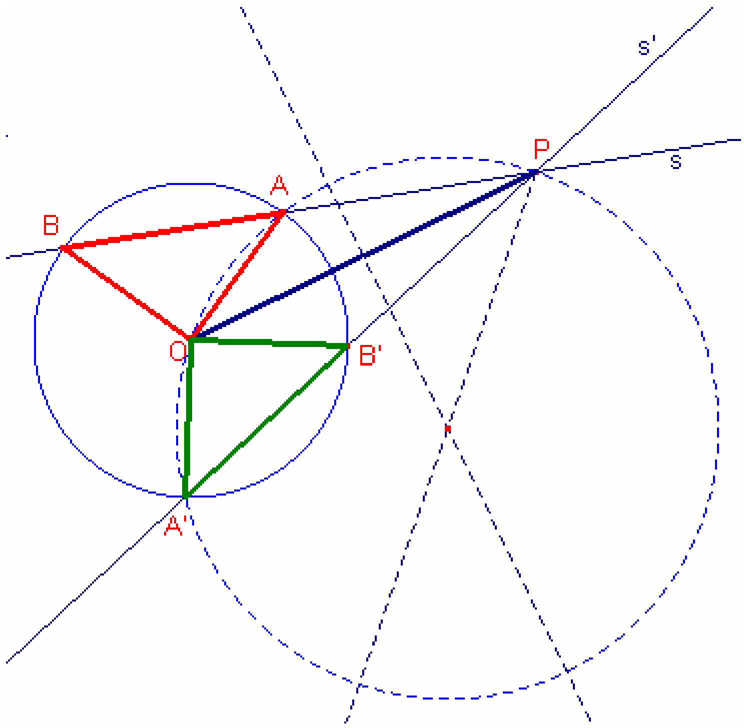
Solució:
Siga P la intersecció de la recta BM i el segment $\overline{AN}$.
Siga Q la intersecció de la recta MN i el costat $\overline{AB}$
Siga $\gamma = \angle ACB$, $\delta = \angle ABM = \angle CAN$.
Aleshores, $\angle ANB = \gamma + \delta$.
$\angle MBC = 90^{o} - \gamma - \delta$.
Aleshores, $\angle NPM = 90^{o}$.
$\overline{MN}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ADC}$.
Aleshores, $\overline{NP}$ és perpendicular al costat $\overline{AB}$.
Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABN}$, les rectes BM, NM són altures d'aquest triangle que s'intersecten en el punt M aleshores M és l'ortocentre del triangle $\overset{\Delta}{ABN}$.
Per tant, la recta AM és altura i perpendicular al costat $\overline{BD}$.
Aleshores, $\overline{AD}$ és perpendicular a $\overline{BC}$.

5.- Donada una circumferència de radi r i un punt exterior P determineu la recta secant a la circumferència que passa pel punt P al que els punt on és secant i el centre de la circumferència formen un triangle d'àrea màxima.

Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi r.
La recta s talla la circumferència en els punts A, B.

El triangle $\overset{\Delta}{AOB}$ és isòsceles,
$\overline{OA} = \overline{OB} = r$
Vegem que de tots els triangles isòsceles de costats iguals constant el de major àrea és el rectangle.
Siga $\alpha = \angle AOB$.

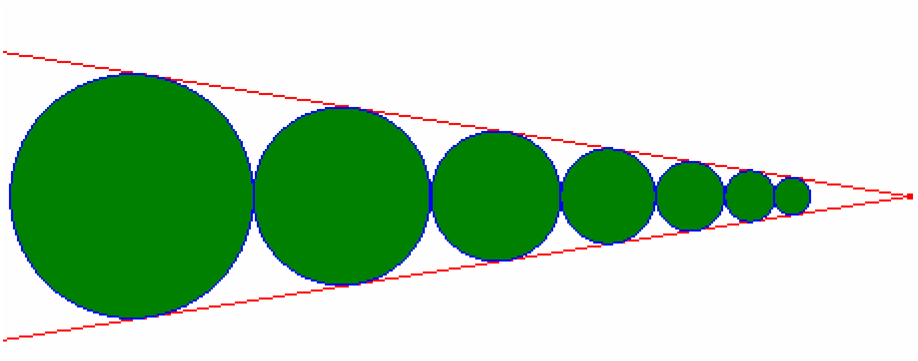
L'àrea del rectangle $\overset{\Delta}{AOB}$ és:
$S_{AOB} = \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin\alpha \le \frac{1}{2}r^2$ la igualtat s'assoleix quan $\alpha = 90^o$.



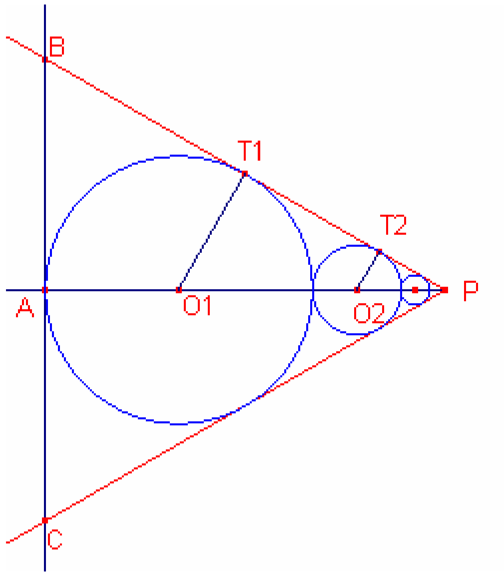
Dibuixem la recta s amb regle i compàs.
Notem que si el problema està resolt.
$\angle OAB = 135^o$ o bé $\angle OA'B' = 45^o$.
Passos de la construcció:
a) Dibuixar l'arc capaç de 135º sobre el segment.
b) L'arc capaç talla la circumferència inicial en el punt A.
c) Dibuixar la recta PA.

Notem que el problema té dues solucions.
El triangle anterior i el simètric de l'anterior respecte del segment $\overline{OP}$.

6.- Una successió infinitat de circumferències tangent és a la vegada tangent a dues semirectes que formen un angle de 60º.
Determineu la suma de les àrees de tots els infinits cercles si el radi de la més gran és R.



Solució:



Siguen les semirectes PB, PC, $\angle BPC = 60^{\circ}$.
Siguen $O_1, O_2, O_3, ...$ els centre de les circumferències i $r_1 = R, r_2, r_3, ...$ els respectius radis.
Siguen $T_1, T_2, T_3, ...$ els punts de tangència de les circumferències i la semirecta PB.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PO_1T_1}$, $\overset{\Delta}{PO_2T_2}$, $\overset{\Delta}{PO_3T_3}$ són semblants.
$\angle O_1PT_1 = 30^{\circ}$, aleshores:

$\overline{PO_1} = 2 \cdot \overline{O_1T_1} = 2 \cdot r_1$.

$$\overline{PO_2} = 2 \cdot \overline{O_2T_2} = 2 \cdot r_2 \qquad (1)$$

$$\overline{PO_2} = \overline{PO_1} - (r_1 + r_2) = r_1 - r_2 \qquad (2)$$

Igualant les expressions (1) (2):

$2 \cdot r_2 = r_1 - r_2$.

$$r_2 = \frac{1}{3} r_1.$$

$$r_3 = \frac{1}{3} r_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 r_1.$$

$$r_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} r_1.$$

La successió dels radis és una progressió geomètrica de primer terme R i raó $\frac{1}{3}$.

La successió de les àrees és una progressió geomètrica de primer terme πR^2 i raó $\left(\frac{1}{3}\right)^2$.

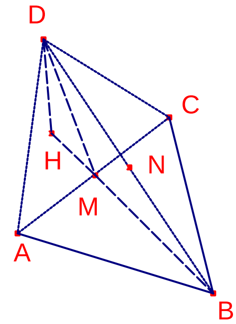
La suma de les infinites àrees és:

$$S = \frac{\pi R^2}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9\pi R^2}{8}.$$

7.- Un tetraedre està format per dos triangles equilàters de costat a i dos triangles rectangles isòsceles.
Determineu el volum del tetraedre.
KöMaL 1997, C480.

Solució:

Siga el tetraedre ABCD tal que les cares $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ACD}$ triangles equilàters.
Si les altres dues cares són triangles rectangles isòsceles, aleshores:
$\angle DAB = \angle BCD = 90^{o}$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AC}$.



L'altura del tetraedre referida a la base $\overset{\Delta}{ABC}$ és igual a l'altura del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{MBD}$ referida al costat $\overline{BM}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMD}$

$$\overline{DM} = \overline{BM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$\overline{BD} = a\sqrt{2}.$$

Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{BD}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BNM}$:

$$\overline{MN}^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}a^2.$$

$$\overline{MN} = \frac{a}{2}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MBD}$ és:

$S_{MBD} = \dfrac{\overline{BD}\cdot\overline{MN}}{2} = \dfrac{\overline{BM}\cdot\overline{DH}}{2}$, on $\overline{DH}$ és l'altura del tetraedre referida a la base $\overset{\Delta}{ABC}$

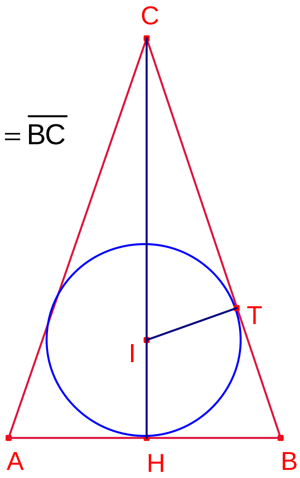
$\dfrac{a\sqrt{2}\cdot\frac{a}{2}}{2} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\overline{DH}}{2}$. Aïllant $\overline{DH}$:

$$\overline{DH} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

El volum del tetraedre ABCD és:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot\overline{DH} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

8.- L'altura i la generatriu d'un con recte formen un angle α.
Determineu la proporció dels volums de l'esfera tangent interior al con i el con.
KöMaL C484.



Solució:

La secció que passa per l'altura forma un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ on $\overline{AC} = \overline{BC}$ són generatrius, $h = \overline{CH}$ altura i $\overline{AH} = R$ radi.
Per hipòtesi $\alpha = \angle ACH$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHC}$:

$$h = \frac{R}{\mathrm{tg}\alpha}.$$

El volum del con és:

$$V_{con} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \frac{R}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{\pi}{3\mathrm{tg}\alpha}R^3.$$

Siga $\overline{IT} = \overline{IH} = r$ radi de l'esfera (I és l'incentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i T el punt de tangència de l'esfera i la superfície lateral del con).

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ITC}$:

$$\frac{r}{\overline{CH} - r} = \sin\alpha.$$

$$r = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}R.$$

El volum de l'esfera és:

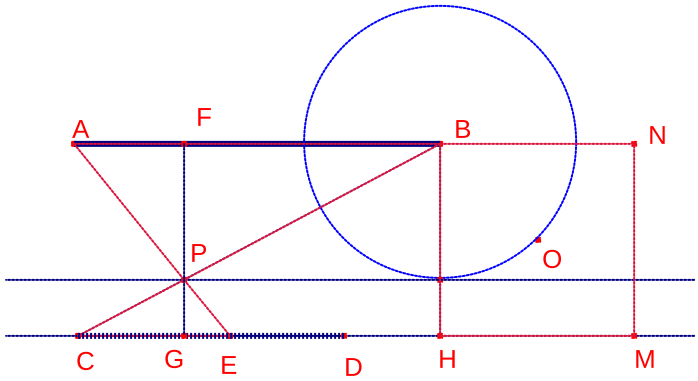
$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}R\right)^3 = \frac{4\pi\cdot\cos^3\alpha}{(1+\sin\alpha)^3}R^3.$$

La proporció entre els volums:

$$\frac{V_{esfera}}{V_{con}} = \frac{4\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)^3}.$$

9.- Siguen el segments paral·lels $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ la distància dels quals és h.
Siga P un punt del segment $\overline{BC}$ tal que les rectes AP i CD s'intersecten en el punt E.

Determineu el punt P tal que la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{CEP}$ siga mínima.
Construïu el punt P amb regle i compàs.
KöMaL, 1998. Gy 3205.



Solució:
Siga $a = \overline{AB}$.

Siga $x = \overline{PF}$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABP}$,

$h - x = \overline{PG}$ altura del triangle $\overset{\Delta}{CEP}$.

Siga $y = \overline{CE}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{CEP}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{a}{x} = \frac{y}{h-x}$. Aïllant la incògnita y:

$y = \frac{h-x}{x}a$.

La superfície del triangle $\overset{\Delta}{ABP}$ és: $S_{ABP} = \frac{ax}{2}$.

La superfície del triangle $\overset{\Delta}{CEP}$ és: $S_{CEP} = \frac{y(h-x)}{2} = \frac{a(h-x)^2}{2x}$.

La funció a optimitzar és la suma de les dues àrees:

$S(x) = \frac{ax}{2} + \frac{a(h-x)^2}{2}$. Calculant la derivada:

$$S'(x) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\left(\frac{-2(h-x)x - (h-x)^2}{x^2}\right).$$

$S'(x) = 0$.

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\left(\frac{-2(h-x)x - (h-x)^2}{x^2}\right) = 0.$$

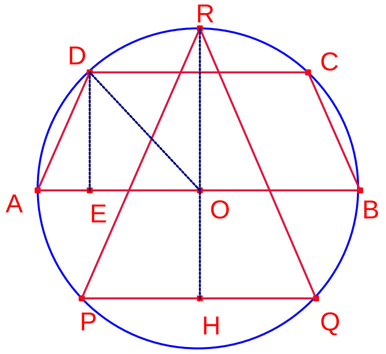
Resolent l'equació $x = \frac{\sqrt{2}}{2}h$.

$S''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}h\right) > 0$. Aleshores, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}h$ és un mínim.

Construcció:
Notem que x és mitja diagonal d'un quadrat de costat h.
Traçarem una paral·lela al segment $\overline{AB}$ a aquesta distància que talla el segment $\overline{BC}$ en el punt P.

10.- En una circumferència hi ha inscrites dues figures.
Un trapezi tal que una de les bases paral·leles és el diàmetre, i un triangle isòsceles que té els costats paral·lels als no paral·lels del trapezi.
Proveu que les dues figures tenen la mateixa àrea.
KöMaL 1998. Gy 3227

Solució:



Siga la circumferència de centre O i radi r.
Siga el trapezi ABCD, $\overline{AB} = 2r$, $\alpha = \angle DAB$.
Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{PQR}$, $\alpha = \angle RPQ = \angle RQP$.

Siga E la projecció de D sobre el diàmetre $\overline{AB}$.
El triangle $\overset{\Delta}{ADO}$ és isòsceles, aleshores:
$\angle AOD = 180º - 2\alpha$.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DEO}$:
$\overline{DE} = r \cdot \sin 2\alpha$, $\overline{EO} = -r \cdot \cos 2\alpha$
$\overline{CD} = 2\overline{EO} = -2r \cdot \cos 2\alpha$.
L'àrea del trapezi ABCD és:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}\overline{DE} = \frac{2r - 2r \cdot \cos 2\alpha}{2} r \cdot \sin 2\alpha = r^2(1 - \cos 2\alpha)\sin 2\alpha =$$
$$= 2r^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha \, .$$

$\angle PRQ = 180º - 2\alpha$. Siga $\overline{RH}$ altura del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{PQR}$.
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{PQR}$:

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin 2\alpha} = 2r \, .$$

Aleshores, $\overline{PQ} = 2r \cdot \sin 2\alpha$.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PHR}$:

$$\overline{RH} = \frac{\overline{PQ}}{2} \operatorname{tg}\alpha = r \cdot \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = 2r \cdot \sin^2 \alpha \, .$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és:

$$S_{PQR} = \frac{\overline{PQ} \cdot \overline{RH}}{2} = 2r^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin 2\alpha \, .$$

Aleshores, el trapezi ABCD i el triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ tenen la mateixa àrea.