

Problemes Geometria 36

1.- Determineu l'àrea de la figura del plànel formada pels punts $P(x, y)$ tal que

$$|x+y|+|x-y| \leq 4.$$

KöMaL, C774.

Solució:

$$\text{Si } \begin{cases} x+y \geq 0 \\ x-y \geq 0 \end{cases}$$

$$|x+y|+|x-y| \leq 4$$

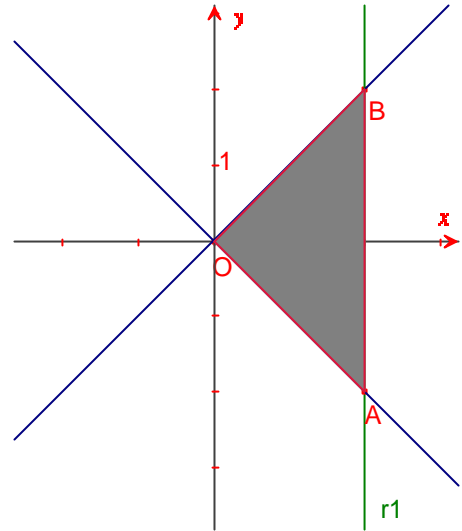
$$x+y+x-y \leq 4.$$

$$x \leq 2.$$

Per tant:

$$\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x-y \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

Aleshores, la solució és el triangle format pels punts $O(0,0)$, $A(2,-2)$, $B(2,2)$



$$\text{Si } \begin{cases} x+y \geq 0 \\ x-y \leq 0 \end{cases}$$

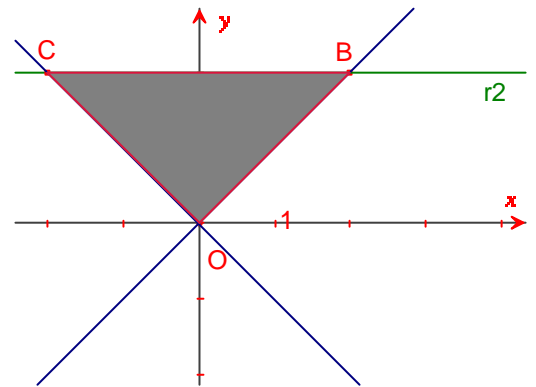
$$|x+y|+|x-y| \leq 4$$

$$x+y-x+y \leq 4.$$

$$y \leq 2.$$

$$\text{Per tant, } \begin{cases} x+y \geq 0 \\ x-y \leq 0 \\ y \leq 2 \end{cases}$$

Aleshores, la solució és el triangle format pels punts $O(0,0)$, $A(2,-2)$, $C(-2,2)$.



$$\text{Si } \begin{cases} x+y \leq 0 \\ x-y \leq 0 \end{cases}$$

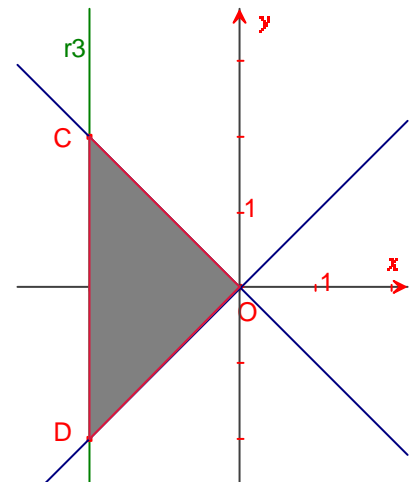
$$|x+y|+|x-y| \leq 4.$$

$$-x-y-x+y \leq 4.$$

$$x \geq -2.$$

$$\text{Per tant, } \begin{cases} x+y \leq 0 \\ x-y \leq 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

Aleshores, la solució és el triangle format pels punts $O(0,0)$, $C(-2,2)$, $D(-2,-2)$.



Si $\begin{cases} x+y \leq 0 \\ x-y \geq 0 \end{cases}$.

$|x+y| + |x-y| \leq 4$.

$-x-y+x-y \leq 4$.

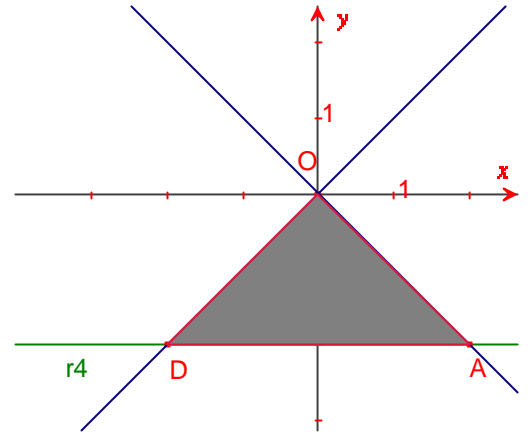
$y \geq -2$.

Per tant, $\begin{cases} x+y \leq 0 \\ x-y \geq 0 \\ y \geq -2 \end{cases}$.

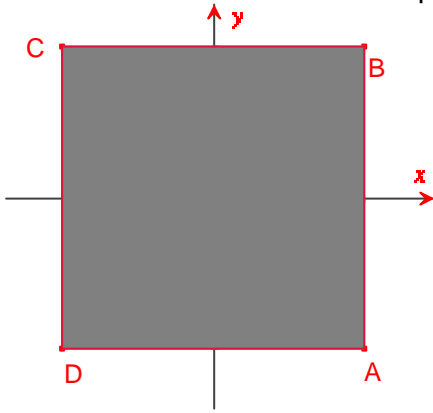
Aleshores, la solució és el triangle format pels punts

$O(0,0)$,

$A(2,-2)$, $D(-2,-2)$.



Aleshores el recinte solució del problema és el quadrat ABCD.



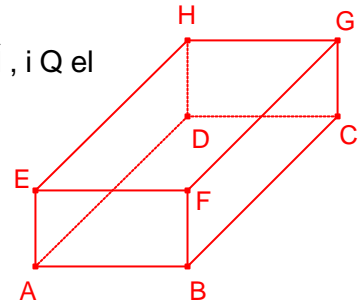
El costat mesura 4 la seua àrea és 16.

2.- Siga l'ortoeidre ABCDEFGH.

Siga S el punt mig de l'aresta \overline{EH} , R el punt mig de l'aresta \overline{GH} , i Q el punt mig de l'aresta \overline{FG} .

Demostreu que les àrees dels triangles $\triangle ASR$, $\triangle DRQ$ són iguals.

KöMaL, B3760.



Solució:

Siguen $a = \overline{AB}$, $b = \overline{AD}$, $c = \overline{AE}$ les mesures de les arestes.

Considerem el sistema de referència ortonormal $\{A, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$

$$\overline{AB} = a \cdot \hat{i}, \quad \overline{AD} = b \cdot \hat{j}, \quad \overline{AE} = c \cdot \hat{k}.$$

$$\overline{AS} = \overline{AE} + \frac{1}{2}\overline{AD} = \left(0, \frac{b}{2}, c\right).$$

$$\overline{SR} = \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{AB} = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right).$$

L'àrea del triangle $\triangle ASR$ és:

$$S_{ASR} = \frac{1}{2} \|\overline{SA} \times \overline{SR}\|$$

$$\overline{SA} \times \overline{SR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -\frac{b}{2} & -c \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{bc}{2}, -\frac{ac}{2}, \frac{ab}{4}\right).$$

$$S_{ASR} = \frac{1}{2} \|\overline{SA} \times \overline{SR}\| = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \sqrt{4b^2c^2 + 4a^2c^2 + a^2b^2}.$$

$$\overline{RD} = -\frac{1}{2}\overline{AB} - \overline{AE} = \left(-\frac{a}{2}, 0, c\right).$$

$$\overline{RQ} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AD} = \left(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, 0\right).$$

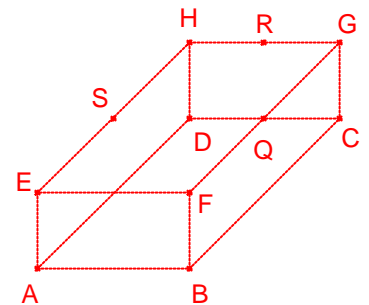
L'àrea del triangle $\triangle DRQ$ és:

$$S_{DRQ} = \frac{1}{2} \|\overline{RD} \times \overline{RQ}\|$$

$$\overline{RD} \times \overline{RQ} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\frac{a}{2} & 0 & -c \\ \frac{a}{2} & -\frac{b}{2} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{bc}{2}, \frac{ac}{2}, \frac{ab}{4}\right).$$

$$S_{DRQ} = \frac{1}{2} \|\overline{RD} \times \overline{RQ}\| = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \sqrt{4b^2c^2 + 4a^2c^2 + a^2b^2}.$$

Aleshores, els dos triangles tenen la mateixa àrea.



3.- Siguen el rectangle ABCD, F el punt mig del costat \overline{CD} , E un punt del costat \overline{BC} tal que \overline{AF} és bisectriu de l'angle $\angle EAD$. Demostreu que \overline{AF} és perpendicular a \overline{EF} .

Solució:

Siga $\overline{AB} = 2a$, $\overline{AD} = b$ costats del rectangle.

Siga $\alpha = \angle DAF = \angle FAE$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ADF$:

$$\overline{AF}^2 = a^2 + b^2.$$

$$\angle EAB = 90^\circ - 2\alpha.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle ABE$:

$$\frac{\overline{BE}}{2a} = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}{2 \frac{a}{b}}.$$

Simplificant:

$$\overline{BE} = \frac{b^2 - a^2}{b}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABE$

$$\overline{AE}^2 = (2a)^2 + \left(\frac{b^2 - a^2}{b}\right)^2 = \frac{(a^2 + b^2)^2}{b^2}.$$

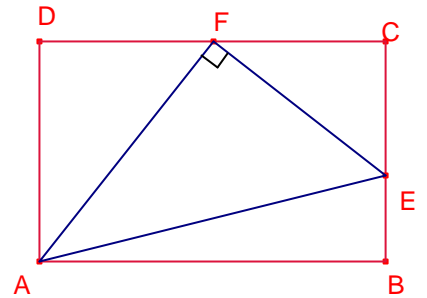
$$\overline{CE} = b - \frac{b^2 - a^2}{b} = \frac{a^2}{b}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ECF$:

$$\overline{FE}^2 = a^2 + \left(\frac{a^2}{b}\right)^2 = \frac{a^2 b^2 + a^4}{b^2}.$$

$$\overline{FE}^2 + \overline{AF}^2 = \frac{a^2 b^2 + a^4}{b^2} + a^2 + b^2 = \frac{(a^2 + b^2)^2}{b^2} = \overline{AE}^2$$

Aplicant el teorema invers del teorema de Pitàgores, el triangle $\triangle AEF$ és rectangle $F = 90^\circ$. Aleshores, \overline{AF} és perpendicular a \overline{EF} .



4.- Un trapezi està inscrit en una circumferència de radi r .
Té tres costats de longitud s i el quart de longitud $r + s$, amb $s < r$.
Determineu la mesura dels seus angles.

Solució:

Un trapezi inscrit en una circumferència és isòsceles.

Siga el trapezi $ABCD$ de costats paral·lels $\overline{CD} = s$,

$\overline{AB} = r + s$, $\overline{AD} = \overline{BC} = s$, inscrit en la circumferència de centre O i radi r .

Siga $\alpha = \angle AOD$.

Aleshores, $A = B = 2\alpha$, $C = D = 180^\circ - 2\alpha$.

Siga M el punt mig del costat \overline{AD} .

Aplicant raons trigonomètriques al

triangle rectangle $\triangle AMO$:

$$\frac{s}{2r} = \sin \frac{\alpha}{2}$$

Siga N el punt mig del costat \overline{AB} .

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle ANO$:

$$\frac{r+s}{2r} = \sin \left(3 \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

Aleshores:

$$\frac{r+s}{2r} = \sin \left(3 \frac{\alpha}{2} \right) = 3 \frac{s}{2r} - 4 \left(\frac{s}{2r} \right)^3.$$

Simplificant:

$$s^3 - 2r^2s + r^3 = 0.$$

Resolent l'equació en la incògnita s :

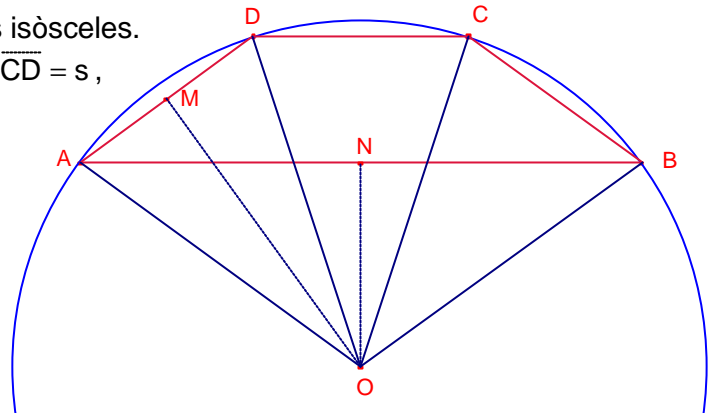
$$s = r, \quad s = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) r. \quad \text{Com que } s < r \text{ tenim que:}$$

$$s = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) r$$

$$\frac{s}{2r} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \text{aleshores, } \frac{\alpha}{2} = 18^\circ.$$

Aleshores, $A = B = 72^\circ$, $C = D = 108^\circ$.

Notem que \overline{AD} és el costat d'un decàgon regular.



5.- Siga el quadrat ABCD. Siga M un punt del costat \overline{AB} i N un punt del costat \overline{BC} tal que $\angle MDN = 45^\circ$. Els segments \overline{DM} , \overline{DN} tallen la diagonal \overline{AC} en els punts P, Q, respectivament.

Siga R el punt mig del segment \overline{MN} .

Proveu que $\overline{PR} = \overline{QR}$.

Solució:

Siga $\overline{AB} = 1$.

Siga $x = \overline{AM}$, $\alpha = \angle ADM$.

$\operatorname{tg} \alpha = x$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle DCN$:

$$\overline{CN} = \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}45^\circ - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}45^\circ \operatorname{tg}\alpha} = \frac{1 - x}{1 + x}.$$

$$\overline{BN} = 1 - \frac{1 - x}{1 + x} = \frac{2x}{1 + x}.$$

Siga T la projecció de R sobre el costat \overline{AB} .

\overline{RT} és la paral·lela mitjana del triangle $\triangle MBN$, aleshores:

$$\overline{RT} = \frac{1}{2} \overline{BN} = \frac{x}{1 + x}.$$

Siga H la projecció de P sobre el costat \overline{AB} .

$\overline{AH} = \overline{PH}$

Els triangles rectangles $\triangle DAM$, $\triangle PHM$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{HM}}{\overline{PH}} = \frac{\overline{AM} - \overline{AH}}{\overline{PH}}.$$

$$\frac{x}{1} = \frac{x - \overline{PH}}{\overline{PH}}.$$

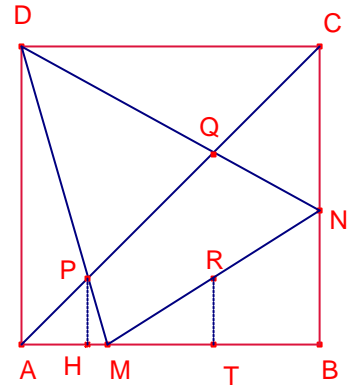
$$\overline{PH} = \frac{x}{1 + x}.$$

Aleshores, $\overline{PH} = \overline{RT}$, per tant, \overline{PR} és paral·lel al costat \overline{AB} .

$\angle QPR = 45^\circ$.

Anàlogament, \overline{QR} és paral·lel al costat \overline{BC} .

Per tant, el triangle $\triangle PRQ$ és rectangle i isòceles, aleshores, $\overline{PR} = \overline{QR}$.



6.- Els quatre costats d'un trapezi isòsceles són tangents a una circumferència i els punts de tangència són vèrtexs d'un quadrilàter, l'àrea del qual és $\frac{4}{9}$ de l'àrea del trapezi.

Si a és la base menor i b la base major del trapezi, determineu $\frac{a}{b}$.

Solució:

Siga $ABCD$ el trapezi isòsceles inscrit en una circumferència de radi r i siguin J, K, L, M els punts de tangència.

Notem que \overline{JL} , \overline{MK} són perpendiculars.

$$\overline{MK} = 2r.$$

$$\overline{BK} = \overline{BL} = \frac{b}{2}.$$

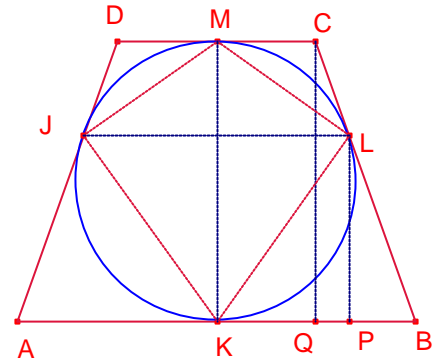
$$\overline{CM} = \overline{CL} = \frac{a}{2}.$$

Aleshores, $\overline{BC} = \frac{a+b}{2}$

Siga P la projecció de L sobre el costat \overline{AB}

Siga Q la projecció de C sobre el costat \overline{AB}

$$\overline{BQ} = \frac{b-a}{2}.$$



Els triangles rectangles $\triangle CQB$, $\triangle LPB$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PB}}{b} = \frac{\frac{b-a}{2}}{\frac{a+b}{2}}. \text{ Aleshores:}$$

$$\overline{PB} = \frac{b(b-a)}{2(a+b)}.$$

$$\overline{JL} = \overline{AB} - 2 \cdot \overline{PB} = b - 2 \frac{b(b-a)}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}.$$

L'àrea del trapezi $ABCD$ és:

$$S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} 2r.$$

L'àrea del quadrilàter $JKLM$ és:

$$S_{JKLM} = \frac{1}{2} \overline{KM} \cdot \overline{JK} = \frac{1}{2} \frac{2ab}{a+b} 2r.$$

Per hipòtesi, $S_{JKLM} = \frac{4}{9} S_{ABCD}$

$$\frac{1}{2} \frac{2ab}{a+b} 2r = \frac{4}{9} \frac{a+b}{2} 2r. \text{ Simplificant:}$$

$$2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0. \text{ Dividint l'expressió per } b^2:$$

$$2\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\left(\frac{a}{b}\right) + 2 = 0. \text{ Resolent l'equació en la incògnita } \frac{a}{b}.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{5 - \sqrt{9}}{4} = \frac{1}{2}.$$

7.- Considerem el tetràedre ABCD tal que $\overline{AD} = \overline{BD} = 5$, $\overline{CD} = 2\sqrt{6}$,
 $\angle BCD = \angle CDA = \angle ADB = 90^\circ$.

- a) Calculeu la distància del vèrtex D a la cara ABC.
 b) Calculeu el radi de l'esfera circumscrita al tetràedre ABCD.

Solució:

Considerem la base BCD, $\angle BCD = 90^\circ$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle BCD$:

$$\overline{BC} = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{6})^2} = 1.$$

La superfície de la cara és:

$$S_{BCD} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{CD}}{2} = \sqrt{6}.$$

\overline{AD} és perpendicular a la base ja que $\angle CDA = \angle ADB = 90^\circ$.

Aleshores, \overline{AD} és altura del tetràedre referida a la base BCD.

El volum del tetràedre és:

$$V = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{3} \sqrt{6} \cdot 5 = \frac{5}{3} \sqrt{6}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ABD$:

$$\overline{AB} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ACD$:

$$\overline{AC} = \sqrt{5^2 + (2\sqrt{6})^2} = 7.$$

Considerem el triangle $\triangle ABC$.

Notem que $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, aleshores, $\triangle ABC$ és rectangle $\angle ABC = 90^\circ$.

L'àrea del triangle $\triangle ABC$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 1}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Siga h la distància de D a la cara ABC. Aquesta distància és l'altura del tetràedre referida a aquesta cara.

El volum del tetràedre és:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} h.$$

Igualant les dues expressions del volum del tetràedre:

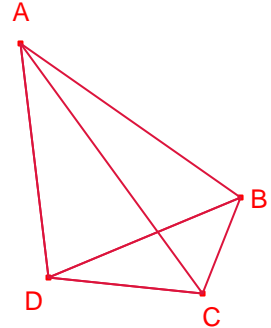
$$\frac{5}{3} \sqrt{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} h. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$h = 2\sqrt{3}.$$

b)

El punt mig del segment \overline{AC} és el circumcentre dels triangles rectangles $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, aleshores és el punt que equidista dels 4 vèrtexs.

$$\text{El radi és } r = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{7}{2}.$$



8.- Siga el rectangle ABCD i siguen E sobre el costat \overline{AB} i F sobre \overline{CD} tal que AECF és un rombe. Si $\alpha = \angle BAC$, calculeu la proporció entre les àrees del rombe i del rectangle.

Solució:

Siga $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$ costats del rectangle ABCD. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$.

Siga $x = \overline{AE}$ costat del rombe.

$$\frac{S_{AECF}}{S_{ABCD}} = \frac{x \cdot b}{a \cdot b} = \frac{x}{a}.$$

$$x = \overline{CE}, \overline{EB} = a - x.$$

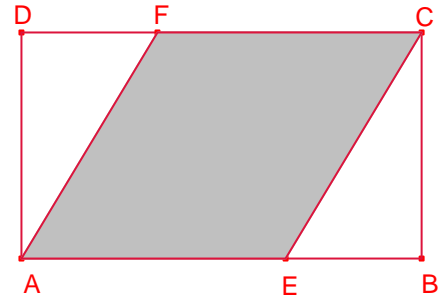
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle EBC$:

$$x^2 = (a - x)^2 + b^2.$$

Simplificant:

$$x = \frac{a^2 + b^2}{2a}.$$

$$\frac{S_{AECF}}{S_{ABCD}} = \frac{x}{a} = \frac{a^2 + b^2}{2a^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$



9.- Siga ABCDEF un hexàgon inscrit en una circumferència si $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{CD} = \overline{DE}$, $\overline{EF} = \overline{FA}$, aleshores, l'àrea del triangle $\triangle BDF$ és igual a la meitat de l'àrea de l'hexàgon ABCDEF.

KöMaL, B4387

Solució:

Siguen $\alpha = \angle CBD$, $\beta = \angle ABF$, $\gamma = \angle AFB$.

Aleshores,

$\alpha = \angle EFD$, $\beta = \angle EDF$, $\gamma = \angle CDB$.

$\angle FDB = \beta + \gamma$, $\angle FBD = \alpha + \beta$, $\angle DFB = \alpha + \gamma$.

Siga P el simètric de C respecte del segment \overline{BD} .

Aleshores, $\overline{CD} = \overline{DP}$, $\angle BDP = \angle CDB = \gamma$.

Per tant, $\overline{DP} = \overline{DE}$, $\angle FDP = \beta + \gamma - \angle BDP = \beta = \angle EDF$.

Aleshores, P és el simètric de E respecte del segment \overline{DF} .

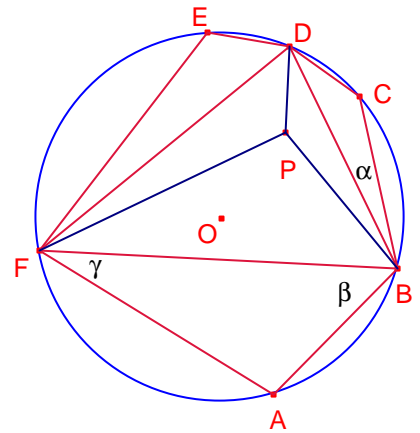
Anàlogament, P és el simètric de A respecte del segment \overline{BF} .

Aleshores, els triangles $\triangle BCD$, $\triangle BPD$ són iguals,

els triangles $\triangle DEF$, $\triangle DPF$ són iguals,

els triangles $\triangle FAB$, $\triangle FPB$ són iguals.

Per tant, L'àrea del triangle $\triangle BDF$ és igual a la meitat de l'àrea de l'hexàgon ABCDEF.



10.- Es dibuixen tres semicercles externs sobre els costats del triangle acutangle $\triangle ABC$.

Les altures sobre els vèrtexs A, B, C intersecten els semicercles en els punts E, F, G, respectivament.

Proveu que l'hexàgon AGBECF és el desenvolupament pla d'una piràmide de base $\triangle ABC$.

Solució:

Per tal que es formi una piràmide de base $\triangle ABC$ s'han d'acomplir les següents condicions:

$\overline{CE} = \overline{CF}$, $\overline{AF} = \overline{AG}$, $\overline{BE} = \overline{BG}$ i més a més,
 $C < \angle ACF + \angle ECB$, $A < \angle CAF + \angle BAG$,
 $B < \angle ABG + \angle CBE$.

Siguin A' , B' , C' els peus de les altures sobre els vèrtexs A, B, C.

Aplicant el teorema del catet al triangle rectangle

$\triangle BCE$:
 $\overline{CE}^2 = \overline{CA'} \cdot a$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle ACA'$:
 $\overline{CA'} = b \cdot \cos C$.

Aleshores, $\overline{CE}^2 = ab \cdot \cos C$.

Aplicant el teorema del catet al triangle rectangle $\triangle ACF$:
 $\overline{CF}^2 = \overline{CB'} \cdot b$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle BCB'$:
 $\overline{CB'} = a \cdot \cos C$.

Aleshores, $\overline{CF}^2 = ab \cdot \cos C$.

Aleshores, $\overline{CE} = \overline{CF}$.

Anàlogament, $\overline{AF} = \overline{AG}$, $\overline{BE} = \overline{BG}$.

Siga $\alpha = \angle ACF$, $\beta = \angle ECB$.

Si $\alpha + \beta \geq 90^\circ$, aleshores, $\alpha + \beta > C$.

Suposem que $\alpha + \beta < 90^\circ$.

$$\cos \alpha = \frac{\overline{CB'}}{\overline{CF}} = \frac{a \cdot \cos C}{\overline{CE}} = \frac{1}{\cos \beta} \cos C.$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos C - \sin \alpha \cdot \sin \beta < \cos C.$$

$$\alpha + \beta > C.$$

Per tant, $C < \angle ACF + \angle ECB$.

Anàlogament, $A < \angle CAF + \angle BAG$, $B < \angle ABG + \angle CBE$.

Per tant, l'hexàgon AGBECF és el desenvolupament pla d'una piràmide de base $\triangle ABC$.

