

Problemes Geometria 37

1.- És possible posar un quadrat de costat $1'05 \times 1'05$ en l'interior d'un cub d'aresta la unitat?

KöMaL B4400.

Solució:

Considerem el cub de coordenades

$A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$,

$A'(0,0,1)$, $B'(1,0,1)$, $C'(1,1,1)$, $D'(0,1,1)$.

Siga $P(x,0,0)$, $Q(1,1-x,0)$, $R(1-x,1,1)$, $S(0,x,1)$.

Determinem x a fi que PQRS siga un quadrat.

$$\vec{PQ} = (1-x, 1-x, 0).$$

$$\vec{SR} = (1-x, 1-x, 0).$$

Aleshores, PQRS és un paral·lelogram.

$$\vec{PS} = (-x, x, 1).$$

$$\vec{PS} \cdot \vec{PQ} = 0.$$

Aleshores, PQRS és un rectangle.

PQRS serà un quadrat quan $\|\vec{PS}\| = \|\vec{PQ}\|$.

$$\sqrt{x^2 + x^2 + 1^2} = \sqrt{(1-x)^2 + (1-x)^2 + 0^2}. \text{ Resolent l'equació:}$$

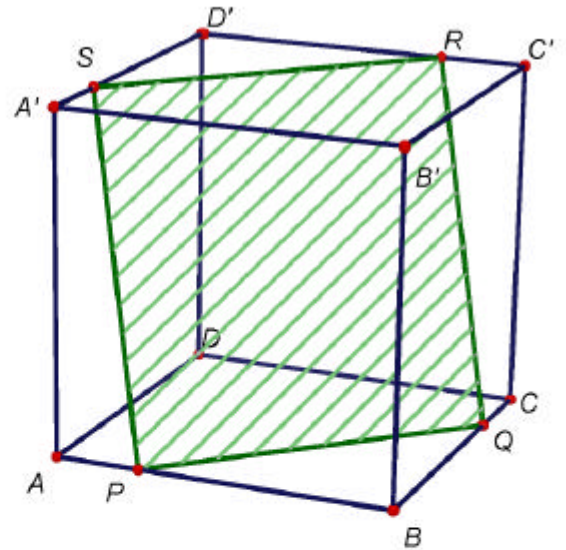
$$x = \frac{1}{4}.$$

$$\|\vec{PS}\| = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{\frac{9}{8}}.$$

$$\text{Vegem que } \sqrt{\frac{9}{8}} > 1'05 = \frac{105}{100} = \frac{21}{20}.$$

$$\frac{9}{8} > \left(\frac{21}{20}\right)^2.$$

Aleshores, si que podem introduir un quadrat de costat $1'05$ en un cub d'aresta 1.



2.- Determineu la mesura de l'arc \widehat{BN} , si $\angle AOB$ és un quadrant i M el centre de la semicircumferència.

Solució:

Siga $\overline{OB} = \overline{OA} = r$ radi del quadrant.

$$\overline{OM} = \frac{r}{2}.$$

Siga P la intersecció de \overline{AM} i la semicircumferència.

Considerem la circumferència de centre M i radi $\overline{OM} = \frac{r}{2}$.

Siga M' la intersecció de \overline{AM} i la circumferència.

Aplicant la potència de A respecte de la circumferència:

$$\overline{AP} \cdot \overline{AM'} = \overline{AO}^2.$$

$$\overline{AP} \cdot (\overline{AP} + \overline{PM'}) = r^2.$$

$$\overline{AP} \cdot (\overline{AP} + r) = r^2.$$

Resolent l'equació $\overline{AP} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} r$.

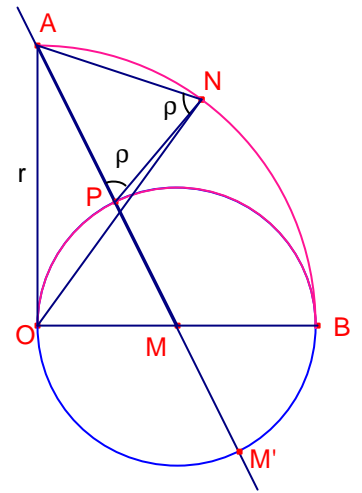
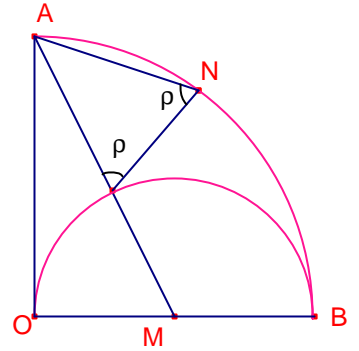
Per hipòtesi $\overline{AN} = \overline{AP} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} r$.

$$\frac{\overline{AN}}{r} = \phi.$$

Aleshores, \overline{AN} és el costat d'un decàgon regular.

$$\widehat{AN} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ. \text{ Aleshores:}$$

$$\widehat{BN} = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ.$$



3.- Donat el paral·lelogram ABCD pel punt C es traça una recta que divideix la diagonal \overline{BD} en dues parts, una quatre vegades l'altra. Demostreu que aquesta recta divideix el costat \overline{AD} en dues parts una tres vegades més gran l'altra.

José Cubillo, 110.

Solució:

Siga P el punt de la diagonal \overline{BD} tal que $\overline{BP} = 4 \cdot \overline{DP}$.

La recta CP talla el costat \overline{AD} en el punt Q.

Siga S l'àrea del triangle $\triangle CDP$.

Siga T l'àrea del triangle $\triangle DQP$.

Siga U l'àrea del triangle $\triangle ABQ$.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

$$S_{BCP} = 4S.$$

$$S_{BQP} = 4T.$$

L'àrea del triangle $\triangle BCQ$ és igual a la meitat de l'àrea del paral·lelogram ABCD.

$$S_{BCD} = S_{CDP} + S_{ABQ}.$$

$$4(S + T) = S + T + U.$$

$$\text{Aleshores, } U = 3(S + T).$$

L'àrea dels triangles $\triangle BCQ$, $\triangle BCD$ és igual.

$$4(S + T) = 5S.$$

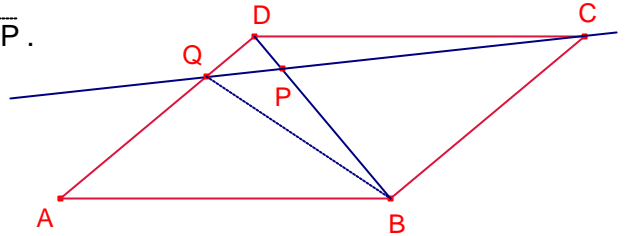
$$\text{Aleshores, } S = 4T.$$

$$\frac{S_{DQB}}{S_{AQB}} = \frac{\overline{DQ}}{\overline{AQ}}.$$

$$\frac{5T}{U} = \frac{\overline{DQ}}{\overline{AQ}}.$$

$$\frac{\overline{DQ}}{\overline{AQ}} = \frac{5T}{3(S+T)} = \frac{5T}{3(4T+T)} = \frac{1}{3}.$$

Aleshores, el punt Q divideix el costat \overline{AD} en dues parts una tres vegades més gran l'altra.



4.- Siga el trapezi ABCD de costats paral·lels $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$.

Considerem sobre els costats \overline{AD} i \overline{BC} els punts E i F, respectivament, tal que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} = \frac{m}{n}. \text{ Calculeu la mesura de } \overline{EF}.$$

José Cubillo, 112.

Solució:

$$\text{Si } \frac{\overline{AE}}{\overline{ED}} = \frac{m}{n}, \text{ siga } \overline{AE} = mx, \overline{ED} = nx.$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} = \frac{m}{n}, \text{ siga } \overline{FB} = my, \overline{FC} = ny.$$

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{AE}} = \frac{y}{x}.$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{y}{x}.$$

Aplicant el teorema invers del teorema de Tales:

\overline{EF} és paral·lel a les bases paral·leles, \overline{AB} , \overline{CD} .

Siga P la intersecció de les rectes AD, BC.

Els triangles $\triangle DCP$, $\triangle ABP$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{y}{x}.$$

Siga $\overline{CP} = ty$, $\overline{DP} = tx$.

Els triangles $\triangle EFP$, $\triangle DCP$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{EF}}{b} = \frac{(n+t)x}{tx} = \frac{n+t}{t}.$$

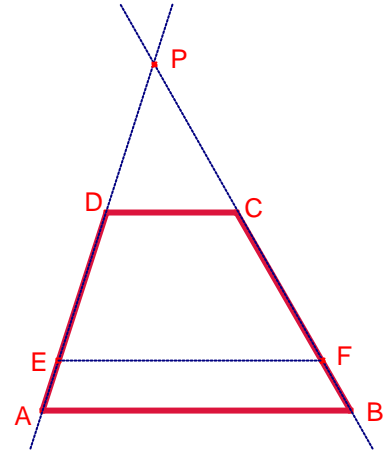
Els triangles $\triangle DCP$, $\triangle ABP$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{a}{b} = \frac{(m+n+t)x}{tx} = \frac{m+n+t}{t}.$$

$$\text{Aleshores, } t = \frac{(m+n)b}{a-b}.$$

$$\overline{EF} = b \frac{n+t}{t} = b \frac{n + \frac{(m+n)b}{a-b}}{\frac{(m+n)b}{a-b}} = \frac{an+bm}{m+n}.$$



5.- Tenim un angle recte de vèrtex O i dos punts A i B que pertanyen a un dels seus costats.

Determineu en l'altre costat de l'angle un punt X de manera que s'acompleixa que $\angle BXA = 2 \cdot \angle ABX$.

Xtec, desembre 2011

Solució:

Siga $a = \overline{OA}$, $b = \overline{AB}$, $\alpha = \angle ABX$, $\angle AXB = 2\alpha$.

Siga $x = \overline{OX}$.

$\angle OAX = 3\alpha$.

Aplicant raons trigonomètriques als triangles

rectangles $\triangle AOX$, $\triangle BOX$.

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{x}{a}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{a+b}$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha}$$

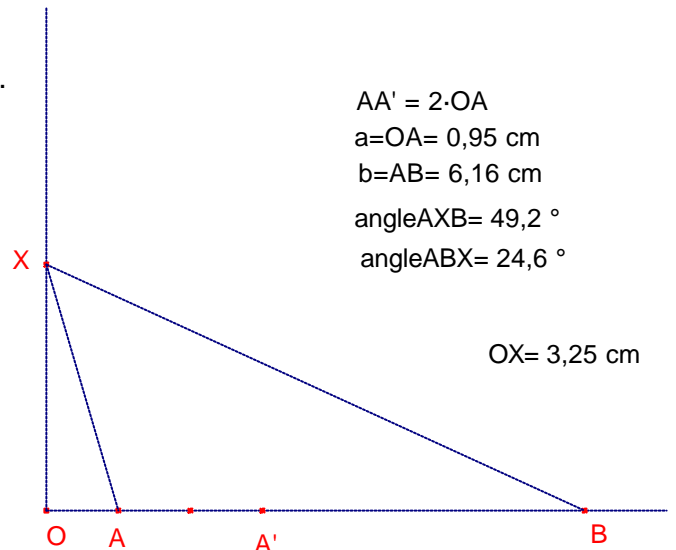
$$\frac{x}{a} = \frac{\frac{3x}{a+b} - \frac{x^3}{(a+b)^3}}{1 - \frac{3x^2}{(a+b)^2}} \text{ . Simplificant:}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{3(a+b)^2 - x^2}{(a+b)^3 - 3x^2(a+b)}$$

$(2a + 3b)x^2 = (a + b)^2(b - 2a)$. Resolent l'equació:

$$x = (a + b) \sqrt{\frac{b - 2a}{2a + 3b}}$$

El problema té solució quan $b > 2a$.



$$AA' = 2 \cdot OA$$

$$a = OA = 0,95 \text{ cm}$$

$$b = AB = 6,16 \text{ cm}$$

$$\text{angle } AXB = 49,2^\circ$$

$$\text{angle } ABX = 24,6^\circ$$

$$OX = 3,25 \text{ cm}$$

6.- Siga el triangle acutangle $\triangle ABC$ d'altures $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$.

Pel punt A_1 es tracen perpendiculars als costats \overline{AC} , \overline{AB}

Pel punt B_1 es tracen perpendiculars als costats \overline{AB} , \overline{BC}

Demostreu que els quatre punts en què les quatre perpendiculars tallen els costats formen un trapezi isòsceles.

XXXII torneo Internacional de las Ciudades. Nivel Juvenil.

Solució:

Les perpendiculars des del punt A_1 als costats \overline{AC} , \overline{AB} tallen els costats en els punts P , Q , respectivament.

Les perpendiculars des del punt B_1 als costats \overline{AB} , \overline{BC} tallen els costats en els punts R , S , respectivament.

Considerem el quadrilàter $RQSP$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle SCB_1$:

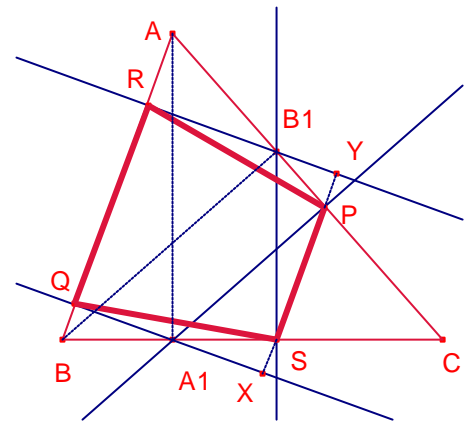
$$\frac{\overline{SC}}{\overline{CB_1}} = \cos C \quad (1)$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle PCA_1$:

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{CA_1}} = \cos C \quad (2)$$

Dividint les expressions (1) (2):

$$\frac{\overline{SC}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{CB_1}}{\overline{CA_1}} = \frac{a \cdot \cos C}{b \cdot \cos C} = \frac{a}{b} \quad (3)$$



Aleshores, els triangles $\triangle ABC$, $\triangle PSC$ són semblants, aleshores, \overline{AB} i \overline{PS} són paral·lels.

Per tant, \overline{RQ} és paral·lel a \overline{PS} . Aleshores, el quadrilàter $RQSP$ és un trapezi de costats paral·lels \overline{RQ} , \overline{PS} .

Siga X la projecció de S sobre la recta A_1Q .

Siga Y la projecció de P sobre la recta B_1R .

Per ser \overline{RQ} és paral·lel a \overline{PS} , i les rectes A_1Q , B_1R perpendiculars a \overline{RS} , tenim que

$$\overline{QX} = \overline{RY} \quad (4)$$

Els triangles $\triangle A_1SX$, $\triangle A_1QB$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{SX}}{\overline{SA_1}} = \cos B \quad (5)$$

Anàlogament:

$$\frac{\overline{PY}}{\overline{PB_1}} = \cos A \quad (6)$$

Dividint les expressions (5) (6):

$$\frac{\overline{PY}}{\overline{SX}} = \frac{\overline{SA_1}}{\overline{PB_1}} \cdot \frac{\cos A}{\cos B} \quad (7)$$

Els triangles $\triangle AA_1C$, $\triangle B_1SC$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{AB_1}} = \cos C \quad (8)$$

$$\overline{AB_1} = b \cdot \cos B \quad (9)$$

Substituint l'expressió (9) en l'expressió (8):

$$\overline{SA_1} = b \cdot \cos C \cdot \cos B \quad (10)$$

Anàlogament:

$$\overline{PB_1} = b \cdot \cos C \cdot \cos A \quad (11)$$

Substituint les expressions (10) (11) en l'expressió (7):

$$\frac{\overline{PY}}{\overline{SX}} = \frac{\overline{SA_1}}{\overline{PB_1}} \cdot \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{b \cdot \cos C \cdot \cos B}{b \cdot \cos C \cdot \cos A} \cdot \frac{\cos A}{\cos B} = 1.$$

Aleshores, $\overline{PY} = \overline{SX}$.

Aleshores els triangles rectangles $\triangle XSQ$, $\triangle YPR$ són iguals, aleshores:

$\overline{PR} = \overline{SQ}$, aleshores, el trapezi RQSP és isòsceles.

7.- Siga el paral·lelogram $ABCD$ i O el punt intersecció de les diagonals \overline{AC} , \overline{BD} .
 Siga M el punt del costat \overline{AB} o de la seua prolongació tal que $\angle MAD = \angle AMO$.
 Demostreu que $\overline{MC} = \overline{MD}$.

Solució:

La recta OM talla el costat \overline{CD} o la seua prolongació en el punt M' .

$\overline{AO} = \overline{CO}$, $\angle OAM = \angle OCM$, aleshores:

Els triangles $\triangle AMO$, $\triangle CM'O$, per tant:

$\overline{OM} = \overline{OM'}$.

$\overline{BO} = \overline{DO}$, $\overline{OM} = \overline{OM'}$, $\angle DOM = \angle BOM$, aleshores:

Els triangles $\triangle BMO$, $\triangle DM'O$, per tant:

$\overline{BM} = \overline{DM'}$.

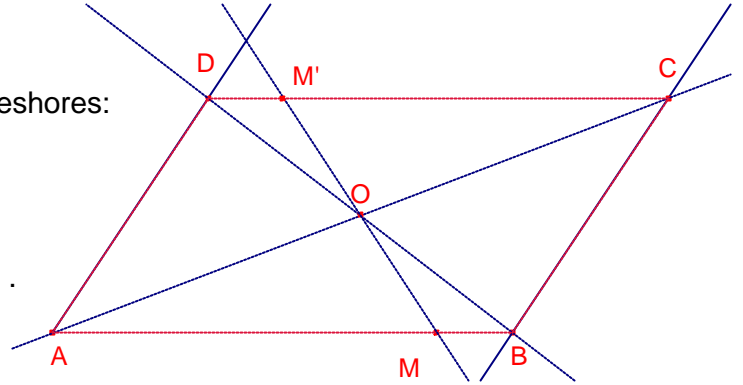
Com que $\angle MAD = \angle AMO$, $\overline{AD} = \overline{MM'} = \overline{BC}$.

$\angle DM'M = 180^\circ - \angle BAD = \angle ABC$.

Aleshores, els triangles $\triangle DMM'$, $\triangle MBC$ són iguals, aleshores,

$\overline{MD} = \overline{MC}$.

Per tant, M pertany a la mediatriu del costat \overline{CD}



8.- En un triangle $\triangle ABC$ les altures $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ es tallen en el punt H.
 Siga X el punt mig del costat \overline{AB} i Y el punt mig del segment \overline{CH} .
 Demostreu que les rectes XY , $A'B'$ són perpendiculars.

Solució:

$\angle AB'B = \angle AA'B = 90^\circ$. Aleshores, el quadrilàter $ABA'B'$ es pot inscriure en una circumferència, aleshores, $\angle BA'B' = 180^\circ - A$.

Aleshores $\angle B'A'C = A$.

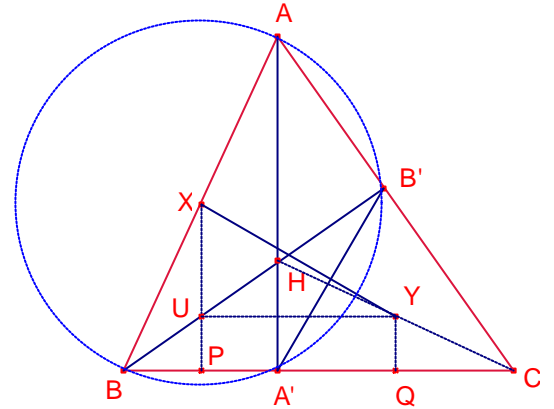
Siga P la projecció de X sobre el costat \overline{BC} .

Siga Q la projecció de Y sobre el costat \overline{BC} .

Siga U la projecció de Y sobre \overline{XP} .

les rectes XY , $A'B'$ són perpendiculars si $\angle UXY = A$.

Siga $\alpha = \angle UXY$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle BPX$

$$\overline{XP} = \frac{c}{2} \sin B, \quad \overline{BP} = \frac{c}{2} \cos B.$$

$$\angle HCB = 90^\circ - B.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle HA'C$

$$\overline{HA'} = \overline{CA'} \cdot \operatorname{ctg} B.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle AA'C$

$$\overline{CA'} = b \cdot \cos C.$$

Aleshores,

$$\overline{HA'} = \overline{CA'} \cdot \operatorname{ctg} B = b \cdot \operatorname{ctg} B \cdot \cos C.$$

$$\overline{YQ} = \frac{1}{2} \overline{HA'} = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} B \cdot \cos C.$$

$$\overline{CQ} = \frac{1}{2} \overline{CA'} = \frac{b}{2} \cos C.$$

$$\overline{PQ} = a - \overline{BP} - \overline{CQ} = a - \frac{c}{2} \cos B - \frac{b}{2} \cos C.$$

$$\overline{XU} = \overline{XP} - \overline{YQ} = \frac{c}{2} \sin B - \frac{b}{2} \operatorname{ctg} B \cdot \cos C = \frac{c \cdot \sin^2 B - b \cdot \cos B \cdot \cos C}{2 \sin B}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{UT}}{\overline{XU}} = \frac{\frac{2a - c \cdot \cos B - b \cdot \cos C}{2}}{\frac{c \cdot \sin^2 B - b \cdot \cos B \cdot \cos C}{2 \sin B}} = \frac{(2a - c \cdot \cos B - b \cdot \cos C) \sin B}{c \cdot \sin^2 B - b \cdot \cos B \cdot \cos C} =$$

$$= \frac{2a \cdot \sin B - c \cdot \cos B \cdot \sin B - b \cdot \cos C \cdot \sin B}{c \cdot \sin B \cdot \sin B - b \cdot \cos B \cdot \cos C} =$$

Aplicant el teorema dels sinus:

$$= \frac{2b \cdot \sin A - b \cdot \cos B \cdot \sin C - b \cdot \cos C \cdot \sin B}{b \cdot \sin C \cdot \sin B - b \cdot \cos B \cdot \cos C} =$$

$$= \frac{2 \sin A - \cos B \cdot \sin C - \cos C \cdot \sin B}{\sin C \cdot \sin B - \cos B \cdot \cos C} =$$

$$= \frac{2 \sin A - \sin(B + C)}{-\cos(B + C)} = \frac{\sin A}{\cos A} = \operatorname{tg} A.$$

Aleshores, $\angle UXY = A$.

9.- Siga ABCD un trapezi de costat paral·lels \overline{AB} , \overline{CD} tal que $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{CD}$.

Siga E el punt mig del costat \overline{BC} .

Demostreu que $\overline{BC} = \overline{AB}$ si i només si en el quadrilàter AECD es pot inscriure una circumferència.

Solució:

Un quadrilàter es pot circumscriure a una circumferència si i només si la suma dels costats oposats és igual.

(\Rightarrow)

Siga $x = \overline{CD}$, $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{CD} = 2x$.

Suposem que $\overline{BC} = \overline{AB} = 2x$.

Prolonguem el costat \overline{CD} , $\overline{DP} = \overline{CD} = x$.

Aleshores, ABCP és un rombe. $\angle APC = \angle B$

Notem que els triangles $\triangle ADP$, $\triangle AEB$ són iguals, aleshores:

$\overline{AD} = \overline{AE}$.

En el quadrilàter AECD, $\overline{AE} + \overline{CD} = \overline{CE} + \overline{AD} = 2x$, aleshores, en el quadrilàter AECD es pot inscriure una circumferència.

(\Leftarrow)

Suposem que en el quadrilàter AECD és pot inscriure una circumferència, aleshores:

$\overline{AE} + \overline{CD} = \overline{CE} + \overline{AD}$.

Siga $x = \overline{CD}$, $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{CD} = 2x$.

Siga $y = \overline{CE} = \overline{BE}$, $a = \overline{AD}$, $b = \overline{AE}$.

$x + b = y + a$

(1)

Les rectes \overline{CD} i \overline{AE} s'intersecten en el punt K.

$\overline{CK} = 2x$, $\overline{KE} = \overline{AE} = b$.

Les rectes \overline{AD} , \overline{BC} s'intersecten en el punt L.

$\overline{DL} = \overline{AD} = a$, $\overline{CL} = \overline{CB} = 2y$.

Siga T el punt de tangència de la circumferència inscrita al quadrilàter AECD i el costat \overline{AE} .

La circumferència inscrita al quadrilàter AECD és la

circumferència inscrita al triangle $\triangle ADK$:

$$\overline{AT} = \frac{\overline{AD} + \overline{AK} - \overline{DK}}{2} = \frac{a + 2b - 3x}{2}.$$

La circumferència inscrita al quadrilàter AECD és la circumferència inscrita al triangle

$\triangle AEL$:

$$\overline{AT} = \frac{\overline{AL} + \overline{AE} - \overline{EL}}{2} = \frac{2a + b - 3y}{2}.$$

Aleshores:

$$a + 2b - 3x = 2a + b - 3y$$

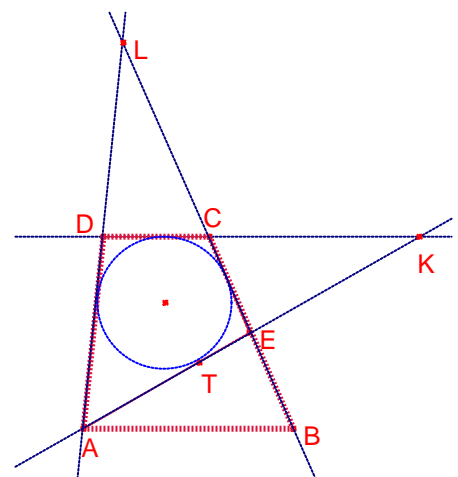
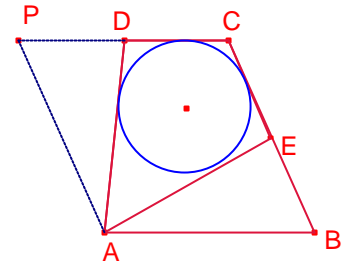
(2)

Restant les expressions (2) i (1):

$$a + b - 3x = a + b - 4y$$

(3)

Per tant, $x = y$, aleshores, $\overline{BC} = \overline{AB}$.



10.- Siguen C una circumferència de radi 2, C_1 una circumferència de radi 1 tangent interior a C en el punt B i C_2 una circumferència de radi 1 tangent a C_1 en el punt A però no tangent a C .

Siga K el punt d'intersecció de la recta AB amb la circumferència C .

Demostreu que K pertany a la circumferència C_2 .

OMA, Olimpíada Mayo 2000.

Solució:

Siga O el centre de la circumferència C , O_1 el centre de la circumferència C_1 i O_2 el centre de la circumferència C_2 .

Siga $\alpha = \angle OBK$.

La recta BO_1 passa pel punt O ja que C_1 és una circumferència tangent interior a C .

$$\overline{OB} = \overline{OK} = 2, \quad \overline{OO_1} = \overline{OB} - \overline{BO_1} = 2 - 1 = 1.$$

Aleshores, $\alpha = \angle OBK = \angle OKB$.

$$\angle BOK = 180^\circ - 2\alpha.$$

Per ser $\angle OO_1A$ angle central i $\alpha = \angle OBK$ és un angle inscrit en la circumferència C_1 , aleshores:

$$\angle OO_1A = 2\alpha.$$

$\overline{O_1O_2} = 2$, per ser C_2 tangent a C_1 i ser 1 els seus respectius radis.

$\overline{O_1O_2} = \overline{OK} = 2$, i a més a més, $\angle OO_1A = 2\alpha$, $\angle BOK = 180^\circ - 2\alpha$ són suplementaris, aleshores:

OKO_2O_1 és un paral·lelogram.

Aleshores, $\overline{O_2K} = \overline{O_1O} = 1$, per tant, K pertany a la circumferència de centre O_2 i radi 1.

