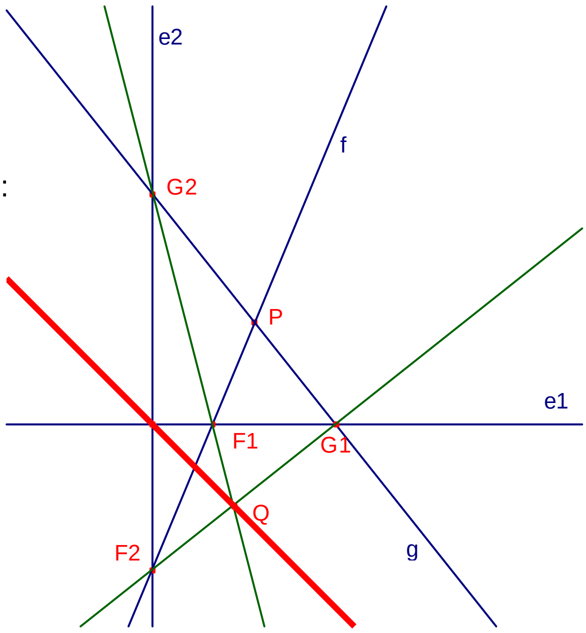
Problemes Geometria 38

1.- Siguen les rectes perpendiculars e_1, e_2. Siga P un punt d'una de les bisectrius de les dues rectes distint de la intersecció.
Siguen les rectes f, g que passen pel punt P.
Les rectes f, g, tallen les rectes e_i en el punts F_i, G_i, respectivament.
Determineu el lloc geomètric dels punts d'intersecció de les recte F_1G_2, F_2G_1 al variar les rectes f, g.
KöMaL, B4406



Solució.
Considerem les rectes e_1, e_2 com els eixos coordenats.
Siga $P(a,a)$ $a \neq 0$ punt del primer o tercer quadrant.
Siga $F_1(b,0) \in e_1, f$. Les coordenades de $F_2 \in e_2$ són:

$$F_2\left(0, \frac{ab}{b-a}\right), \; b \neq a.$$

Siga $G_1(c,0) \in e_1, g$. Les coordenades de $G_2 \in e_2$ són:

$$G_2\left(0, \frac{ac}{c-a}\right), \; c \neq a.$$

L'equació canònica de la recta que passa pels punts F_1, G_2 és:

$$r_{F_1G_2} \equiv \frac{x}{b} + \frac{y}{\frac{ac}{c-a}} = 1.$$

L'equació canònica de la recta que passa pels punts F_2, G_1 és:

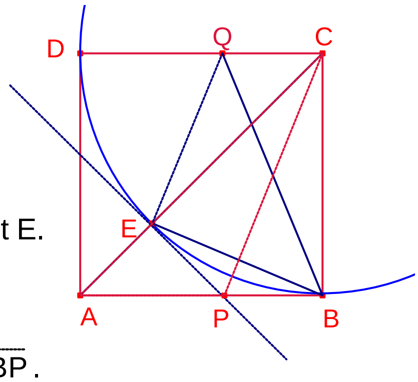
$$r_{F_2G_1} \equiv \frac{x}{c} + \frac{y}{\frac{ab}{b-a}} = 1.$$

La intersecció d'ambdues rectes és:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{\frac{ac}{c-a}} = 1 \\ \dfrac{x}{c} + \dfrac{y}{\frac{ab}{b-a}} = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \dfrac{abc}{ab+ac-bc} \\ y = \dfrac{-abc}{ab+ac-bc} \end{cases}.$$

Aleshores, $x = -y$, que és l'altra recta bisectriu a les rectes e_1, e_2 menys els punts $T(a, -a)$, $O(0, 0)$.

2.- Siga E un punt de la diagonal $\overline{AC}$ del quadrat ABCD tal que $\overline{CE}=\overline{BC}$.
Proveu que $\overline{BE}^2=\overline{AC}\cdot\overline{AE}$.



Solució 1:

$\overset{\Delta}{BEC}$ és isòsceles, $\angle ECB=45^o$, aleshores:

$\angle EBC=90^o-\dfrac{45^o}{2}$. $\angle ABE=\dfrac{45^o}{2}$.

Considerem la perpendicular a la diagonal $\overline{AC}$ que passa pel punt E.
Aquesta perpendicular talla el costat $\overline{AB}$ en el punt P.
$\overline{AE}=\overline{EP}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CEP}$, $\overset{\Delta}{CBP}$ són iguals, aleshores: $\overline{EP}=\overline{BP}$.

Siga Q un punt del costat $\overline{CD}$ tal que $\angle QBC=\dfrac{45^o}{2}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CBP}$, $\overset{\Delta}{BCQ}$ són iguals, aleshores: $\overline{BP}=\overline{CQ}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{AEB}$, $\overset{\Delta}{CQE}$ són iguals, aleshores: $\overline{EQ}=\overline{BE}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APC}$ és:

$S_{APC}=S_{ABC}-S_{PBC}$ (1)

Els triangles $\overset{\Delta}{AEB}$, $\overset{\Delta}{CQE}$ són iguals, aleshores: $S_{CQEB}=S_{ABC}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EBQ}$ és:

$S_{EBQ}=S_{CQEB}-S_{CQB}=S_{ABC}-S_{PBC}$ (2)

De les expressions (1) (2):

$S_{APC}=S_{EBQ}$ (3)

$S_{APC}=\dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{EP}}{2}=\dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{AE}}{2}$ (4)

$S_{EBQ}=\dfrac{\overline{BE}\cdot\overline{EQ}}{2}=\dfrac{\overline{BE}^2}{2}$ (5)

$\dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{AE}}{2}=\dfrac{\overline{BE}^2}{2}$ (6)

Aleshores, $\overline{BE}^2=\overline{AC}\cdot\overline{AE}$.

Solució 2:

Siga $a=\overline{BC}=\overline{CE}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle isòsceles $\overset{\Delta}{BCE}$:

$\overline{BE}^2=a^2+a^2-2a\cdot a\cdot\cos 45^o=\left(2-\sqrt{2}\right)a^2$.

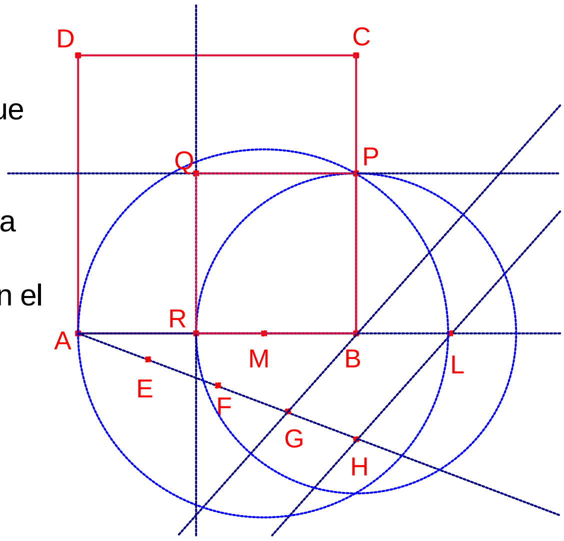
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC}=a\sqrt{2}$, $\overline{AE}=\overline{AC}-\overline{CE}=\left(\sqrt{2}-1\right)a$.

$\overline{AC}\cdot\overline{AE}=a\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)a=\left(2-\sqrt{2}\right)a^2$.

Aleshores, $\overline{BE}^2=\overline{AC}\cdot\overline{AE}$.

3.- Donat el quadrat ABCD dibuixeu un quadrat d'àrea la tercera part de l'àrea del quadrat ABCD.
Aref, M.N., Wernick, W. "Problemes and Solutions in Euclidean Geometry". Pàgina 59, problema 48.

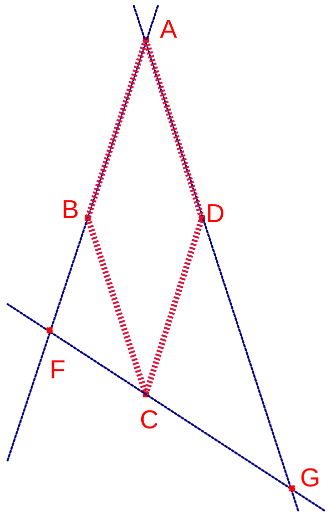


Solució:
Construcció:
a) Dibuixeu la semirecta d'origen A.
b) En la semirecta dibuixeu els punts E, F, G, H tal que $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH}$.
c) Dibuixeu la recta que passa pels punts B, G.
d) Dibuixeu la recta paral·lela a la recta GB que passa pel punt H.
e) Aquesta recta talla la prolongació del costat $\overline{AB}$ en el punt L.
f) Notem que $\overline{BL} = \frac{1}{3}\overline{AB}$.
g) Dibuixeu el punt mig M del segment $\overline{AL}$.
Notem també que $\overline{AM} = \frac{2}{3}\overline{AB}$.
h) Dibuixeu la circumferència de centre M que passa pel punt A.
i) La circumferència talla el costat $\overline{BC}$ en el punt P.
j) Notem que $\overline{BP}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BL} = \frac{1}{3}\overline{AB}^2$. Aleshores, $\overline{BP}$ és el costat del quadrat que cerquem.
k) Dibuixar el quadrat BPQR.

4.- Donat el rombe ABCD dibuixem una recta exterior al rombe que passa pel punt C. La recta talla les prolongacions dels costats $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ en els punts, F, G, respectivament.

Proveu que $\frac{1}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AF}} + \frac{1}{\overline{AG}}$.

Aref, M.N., Wernick, W. "Problemes and Solutions in Euclidean Geometry". Pàgina 137, problema 49.



Solució:

Els triangles $\overset{\Delta}{AFG}$, $\overset{\Delta}{BFC}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AF} - \overline{BC}}{\overline{BC}}$$

$$a \cdot \overline{AF} + a \cdot \overline{AG} = \overline{AF} \cdot \overline{AG}.$$

Dividint l'expressió per $\overline{BC} \cdot \overline{AF} \cdot \overline{AG}$:

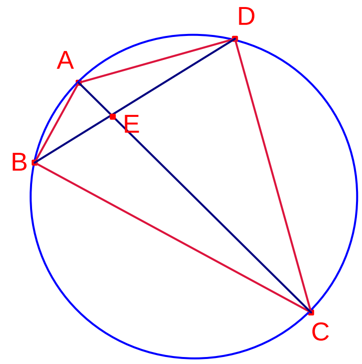
$$\frac{1}{\overline{AF}} + \frac{1}{\overline{AG}} = \frac{1}{\overline{BC}} = \frac{1}{\overline{AB}}.$$

Nota: si la recta talla el rombe aleshores:

$$\frac{1}{\overline{AB}} = \left| \frac{1}{\overline{AF}} - \frac{1}{\overline{AG}} \right|.$$

5.- Siga ABCD un quadrilàter inscriptible en una circumferència tal que $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 8\sqrt{3}$, $\overline{AC} = 4\sqrt{13}$, $\overline{AD} = 2\sqrt{3}$.

Determineu la mesura del segment $\overline{BE}$.



Solució:

Notem que $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$.

Aplicant el teorema invers del teorema de Pitàgores:

$B = 90^o$.

Per ser ABCD inscriptible, els angles oposats són suplementaris, aleshores:

$D = 90^o$.

$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}$, aleshores, $\angle ACD = 30^o$.

Per ser B inscrit en la circumferència i abraçar el mateix arc que l'angle inscrit $\angle ACD$:

$\angle ABD = 30^o$.

$\angle DBC = 60^o$.

Siga $\alpha = \angle ACB$. Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\sin\alpha = \frac{4}{4\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}, \quad \cos\alpha = \frac{8\sqrt{3}}{4\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCE}$:

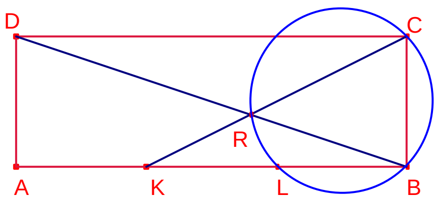
$$\frac{\overline{BE}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{BC}}{\sin(60^o+\alpha)}.$$

$$\frac{\overline{BE}}{\frac{\sqrt{13}}{13}} = \frac{8\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2\sqrt{39}}{13} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{13}}{13}}.$$

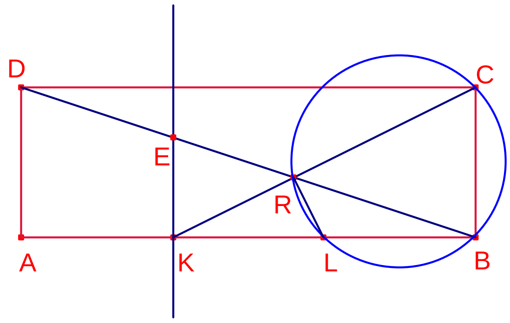
Simplificant:

$$\overline{BE} = \frac{16\sqrt{3}}{7}.$$

6.- Siga el rectangle ABCD tal que $\overline{AB}=3\cdot\overline{AD}$.
Siguen K, L dos punts del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{AK}=\overline{KL}=\overline{LB}$.
La diagonal $\overline{BD}$ i el segment $\overline{CK}$ s'intersecten en el punt R.
Proveu que el quadrilàter BCRL és inscriptible.
Aref, M.N., Wernick, W. "Problemes and Solutions in Euclidean Geometry". Pàgina 134, problema 19.



Solució 1:
Siga $\overline{AD}=a$, $\overline{AB}=3a$.
La perpendicular al costat $\overline{AB}$ i la diagonal $\overline{BD}$ s'intersecten en el punt E.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{KBE}$ són semblants i la raó és 3:2.
Aleshores, $\overline{KE}=\frac{2}{3}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KBC}$:
$\overline{CK}=a\sqrt{5}$.

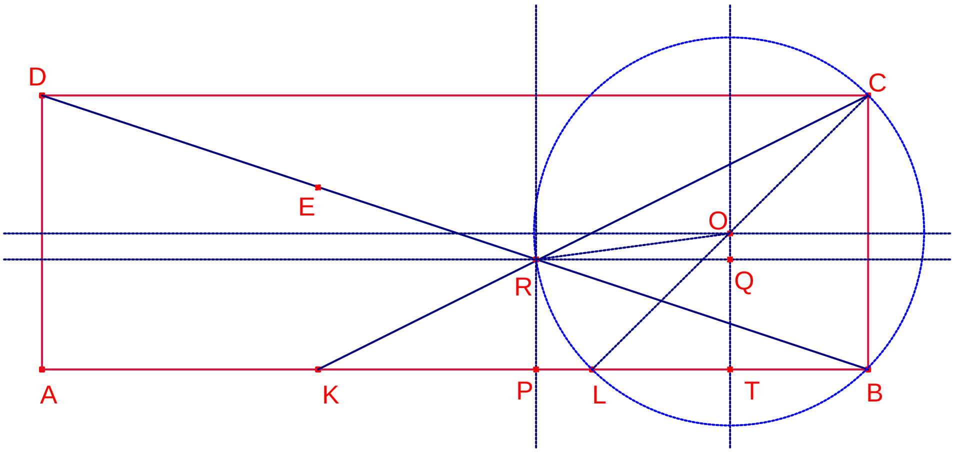
Els triangles $\overset{\Delta}{KRE}$, $\overset{\Delta}{CRB}$ són semblants la raó és 2:3.
Aleshores, $\overline{KR}=\frac{2}{5}\overline{CR}=\frac{2\sqrt{5}}{5}a$.

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{KRL}$.

$$\frac{\overline{KR}}{\overline{KL}}=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}a}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}. \qquad \frac{\overline{KB}}{\overline{CK}}=\frac{2a}{a\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Aleshores, triangles $\overset{\Delta}{KRL}$, $\overset{\Delta}{KBC}$ són semblants, aleshores:
$\angle KRL=\angle KBC=90^{o}$.
Per tant, el quadrilàter BCRL és inscriptible ja que els angles oposats R i B són suplementaris.

Solució 2:



Siga $\overline{AD}=a$, $\overline{AB}=3a$
Siga P la projecció de R sobre el costat $\overline{AB}$.

La circumferència que passa pels punts L, B, C és igual al punt mig O de la hipotenusa $\overline{LC}$ del triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{LBC}$. El radi és $\overline{OL}=\frac{1}{2}\overline{LC}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vegem que $\overline{OR}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Siga T la projecció de O sobre el costat $\overline{AB}$.

$\overline{OT}=\frac{1}{2}a$, $\overline{TB}=\frac{1}{2}a$

Siga Q la projecció de R sobre el segment $\overline{OT}$.

Siga $x=\overline{PB}$, $y=\overline{RP}$. $\overline{KP}=2a-x$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{PBR}$, són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{y}{x}=\frac{1}{3}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{KPR}$, $\overset{\Delta}{KBC}$, són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{y}{2a-x}=\frac{1}{2}$.

Considerem el sistema format per les dues expressions:

$\begin{cases}\frac{y}{x}=\frac{1}{3}\\ \frac{y}{2a-x}=\frac{1}{2}\end{cases}$, la solució del qual és: $\begin{cases}x=\overline{PB}=\frac{6}{5}a\\ y=\overline{RP}=\frac{2}{5}a\end{cases}$.

$\overline{RQ}=\overline{PT}=\overline{PB}-\overline{TB}=\frac{6}{5}a-\frac{1}{2}a=\frac{7}{10}a$.

$\overline{OQ}=\overline{OT}-\overline{RP}=\frac{1}{2}a-\frac{2}{5}a=\frac{1}{10}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{RQO}$

$\overline{RO}=\sqrt{\overline{RQ}^2+\overline{OQ}^2}=\sqrt{\left(\frac{7}{10}a\right)^2+\left(\frac{1}{10}a\right)^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Aleshores, R pertany a la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{LBC}$.

7.- Siga el rectangle ABCD i E un punt sobre el costat $\overline{AD}$.
La recta CE talla la circumferència circumscrita al rectangle en el punt F i a la recta AB en el punt B.

Proveu que $\dfrac{\overline{AG}\cdot\overline{AE}}{\overline{FB}\cdot\overline{FD}}=\dfrac{\overline{EG}^2}{\overline{BD}^2}$.

Aref, M.N., Wernick, W. "Problemes and Solutions in Euclidean Geometry". Pàgina 134, problema 9.

Solució:

Siga $\alpha=\angle FCA$, $\beta=\angle BAC$.

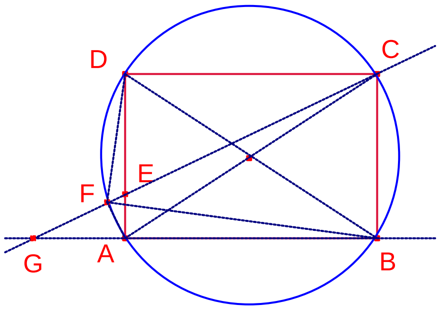
$\angle ABF=\angle FCA=\alpha$

F és un angle inscrit en la circumferència de diàmetres $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ que abraça el diàmetre, aleshores, $\angle BFD=90^{o}$, $\angle CFA=90^{o}$.

$\angle DBF=\angle FAD=\beta-\alpha$.

G és un angle exterior a la circumferència, aleshores:

$\angle BGC=\beta-\alpha$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{GAE}$, $\overset{\Delta}{BFD}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{FD}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{AG}}{\overline{EG}}.$$

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{FD}}=\frac{\overline{EG}}{\overline{BD}} \qquad (1)$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AEF}$, $\overset{\Delta}{GEA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{EG}}{\overline{AG}} \qquad (2)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{AFD}$, $\overset{\Delta}{GAC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FD}}=\frac{\overline{AG}}{\overline{AC}} \qquad (3)$$

Multiplicant les expressions (1) (2) (3):

$$\frac{\overline{AG}\cdot\overline{AE}}{\overline{FB}\cdot\overline{FD}}=\frac{\overline{EG}^2}{\overline{BD}\cdot\overline{AC}}=\frac{\overline{EG}^2}{\overline{BD}^2}.$$

8.- Siga ABCD un quadrilàter inscriptible. Siga E la intersecció de les diagonals.

Proveu que $\frac{\overline{BE}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\overline{AD}\cdot\overline{CD}}$

Aref, M.N., Wernick, W. "Problemes and Solutions in Euclidean Geometry". Pàgina 134, problema 12.

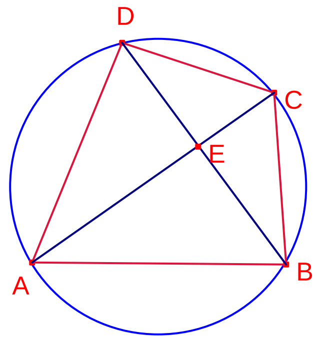
Solució:

Els triangles $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{DCE}$ són semblants ja que $\angle ABE=\angle ACD$, $\angle BAE=\angle CDE$.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}.$$

$$\frac{1}{\overline{DE}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}\cdot\overline{CD}} \qquad (1)$$



Els triangles $\overset{\Delta}{BCE}$, $\overset{\Delta}{ADE}$ són semblants ja que $\angle CBE=\angle DAE$, $\angle BCE=\angle ADE$.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}.$$

$$\overline{BE}=\frac{\overline{AE}\cdot\overline{BC}}{\overline{AD}} \qquad (2)$$

Multiplicant les expressions (1) (2):

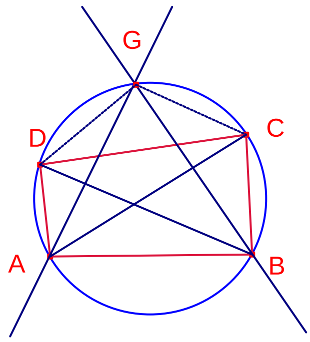
$$\frac{\overline{BE}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\overline{AD}\cdot\overline{CD}}.$$

9.- Siga ABCD un quadrilàter inscriptible.
Les bisectrius de l'angle $\angle CAD$ de l'angle $\angle CBD$, s'intersecten en el punt G.

Proveu que $\frac{\overline{AG}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{AD} + \overline{AC}}{\overline{BD} + \overline{BC}}$.

Aref, M.N., Wernick, W. "Problemes and Solutions in Euclidean Geometry". Pàgina 135, problema 20.

Solució:



La bisectriu de l'angle $\angle CAD$ talla l'arc $\overset{\frown}{CD}$ en el seu punt mig.

La bisectriu de l'angle $\angle CBD$ talla l'arc $\overset{\frown}{CD}$ en el seu punt mig.

Aleshores la intersecció de les dues bisectriu és el punt mig de l'arc $\overset{\frown}{CD}$.
Siga $x = \overline{CG} = \overline{DG}$.
Aplicant el teorema de Tolomeu al quadrilàter inscriptible ADGC:

$$\overline{AG} \cdot \overline{CD} = x \cdot \overline{AC} + x \cdot \overline{AD} \qquad (1)$$

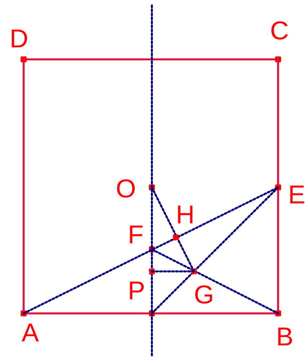
Aplicant el teorema de Tolomeu al quadrilàter inscriptible BCDG:

$$\overline{BG} \cdot \overline{CD} = x \cdot \overline{BD} + x \cdot \overline{BD} \qquad (2)$$

Dividint les expressions (1) (2):

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{AD} + \overline{AC}}{\overline{BD} + \overline{BC}}.$$

10.- Donat el quadrat ABCD de centre O, siga E el punt mig del costat $\overline{BC}$, F el punt mig del segment $\overline{AE}$. Siga G el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$.
El segment $\overline{OG}$ talla el segment $\overline{AE}$ en el punt H.
Proveu que l'àrea del quadrat ABCD és igual a $8 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{FH}$.
Aref, M.N., Wernick, W. "Problemes and Solutions in Euclidean Geometry". Pàgina 138, problema 59.



Solució:
Siga $c = \overline{AB}$ costat del quadrat.
$\angle OFE = \angle AEF$.
Siga P la projecció de G sobre la recta OF.

$$\overline{PG} = \frac{1}{3}\overline{OE} = \frac{1}{6}c. \quad \overline{FP} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\overline{BE} = \frac{1}{12}c.$$

$$\overline{OF} = \frac{1}{2}\overline{BE} = \frac{1}{4}c$$

$$\overline{OP} = \overline{OF} + \overline{FG} = \frac{1}{3}c.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OPG}$, $\overset{\Delta}{ABE}$, són semblants ja que $\dfrac{\overline{PG}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{2}$.

Aleshores, $\angle FHO = \angle EAB = \angle OEF$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{OHF}$, $\overset{\Delta}{ABE}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{FH}}{\overline{OF}}.$$

$$\frac{\frac{c}{2}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{FH}}{\frac{c}{4}}.$$

Aleshores,

$$\overline{AE} \cdot \overline{FH} = \frac{1}{8}c^2 = \frac{1}{8}S_{ABCD}.$$