

### Problemes geometria 3

1.- Siga el triangle  $\triangle ABC$ .

Si  $\cos(3A) + \cos(3B) + \cos(3C) = 1$  aleshores un dels angles és igual a  $120^\circ$ .

2.- Donat el triangle  $\triangle OAB$  construïm el triangle que generen els extrems dels vectors  $r \cdot \vec{OB}$ ,  $s \cdot \vec{AB}$ ,  $t \cdot \vec{OA}$ .

Determineu que la raó entre les àrees del triangle inicial i el nou triangle és

$$\frac{1}{|s(t-r) - tr - r|}$$

3.-

a) Demostreu que tres segments de longituds donades  $m, n, p$  poden ser les mitjanes d'un triangle si i només si es pot construir un triangle que els tinga per costats.

b) Donades tres longitud  $m, n, p$  que compleixen la condició anterior, calculeu les longituds d'un triangle que té per mitjanes  $m, n, p$ .

4.- Siga el triangle rectangle  $\triangle ABC$   $\angle ABC = 90^\circ$ .

Siguen  $m$  i  $n$  les longituds de les mitjanes respectives als vèrtexs  $A, C$ .

a) Proveu que  $\frac{1}{2} \leq \frac{m}{n} \leq 2$ .

b) Si  $\alpha$  és l'angle format per aquestes dues mitjanes, quin és el valor màxim que pot assolir  $\alpha$ ?

5.- En qualsevol triangle rectangle s'acompleix la següent desigualtat:

$0,4 < \frac{r}{h} < 0,5$  on  $r$  és el radi de la circumferència inscrita i  $h$  és l'altura sobre la hipotenusa.

6.- En una circumferència està inscrit un triangle isòsceles  $\triangle ABC$   $\overline{AB} = \overline{BC}$ .

Siga un punt  $K$  qualsevol de l'arc  $\widehat{AC}$ .

Aleshores,  $\overline{AK} \cdot \overline{KC} = \overline{BK}^2 - \overline{AB}^2$ .

7.- Demostreu que en un triangle rectangle  $\frac{r}{R} \leq \sqrt{2} - 1$  on  $r$  és el radi de la circumferència inscrita i  $R$  el radi de la circumferència circumscriu.

8.- Considerem el triangle  $\triangle ABC$ , siga  $r$  el radi de la circumferència inscrita. Siguen  $h_1, h_2, h_3$  les 3 altures del triangle.

Aleshores,  $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}$ .

9.- Demostreu que si dues mitjanes  $m_a, m_b$  d'un triangle  $\triangle ABC$  són perpendiculars aleshores es té que  $m_c^2 = m_a^2 + m_b^2$ , on  $m_c$  és l'altra mitjana.

10.- Des del punt mig de la base  $\overline{AB}$  del triangle isòsceles  $\triangle ABC$  s'ha traçat una perpendicular al costat  $\overline{BC}$  que talla el costat en el punt M. Siga N el punt mig del segment  $\overline{DM}$ . Demostreu que els segments  $\overline{CN}$ ,  $\overline{AM}$  són perpendiculars.

11.- Demostreu que la suma dels catets d'un triangle rectangle és igual o menor que la diagonal del quadrat construït sobre la hipotenusa.

12.- En l'interior d'un triangle equilàter  $\triangle ABC$  es troba un punt P tal que  $\overline{PA} = 6\text{cm}$ ,  $\overline{PB} = 8\text{cm}$ ,  $\overline{PC} = 10\text{cm}$ . Determineu el costat del triangle i la seua àrea.

13.- En el triangle  $\triangle ABC$  sabem que  $\overline{AC} : \overline{BC} = 1 : 3$ ,  $\angle ACB = \arctg \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

En el costat  $\overline{AC}$  agafem un punt D tal que  $\overline{AD} = \overline{CD}$ .

Determineu la raó entre l'àrea del cercle circumscrit al triangle  $\triangle ACD$  i l'àrea del cercle inscrit al triangle  $\triangle ABD$ .

14.- Siga el triangle  $\triangle ABC$  rectangle  $A = 90^\circ$ .

Pel punt O del catet  $\overline{AB}$  tracem la perpendicular  $\overline{OH}$  a la hipotenusa  $\overline{BC}$ .

Siga D la intersecció de la recta OH i la recta AC.

Siga E la intersecció de les rectes DB i OC.

Determineu el lloc geomètric del punt E al variar O sobre el catet  $\overline{AB}$ .