1.- Siga el segment $\overline{AB}$ i siga M el seu punt mig.
Determineu el lloc geomètric dels punts P del plànol que $\overline{PM}$ és mitja proporcional de $\overline{PA}$ i $\overline{PB}$.

Solució:
Siga $A(0,0)$, $B(2a,0)$, M el punt mig del segment $\overline{AB}$ té coordenades $M(a,0)$

Siga $P(x,y)$ el punt que cerquem, $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PM}} = \dfrac{\overline{PM}}{\overline{PB}}$

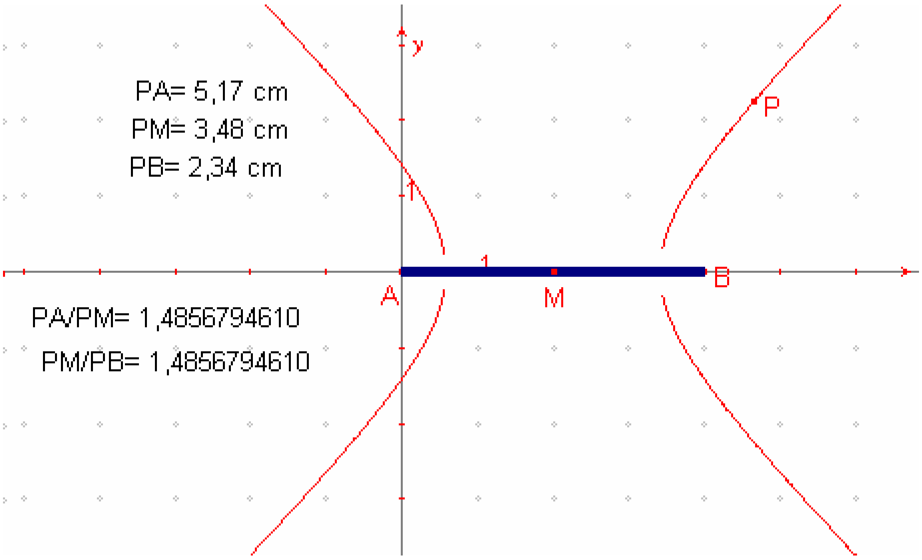
$\overline{PA} = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\overline{PB} = \sqrt{(x-2a)^2 + y^2}$, $\overline{PM} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$.

$\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = \dfrac{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-2a)^2 + y^2}}$, elevant al quadrat i simplificant:

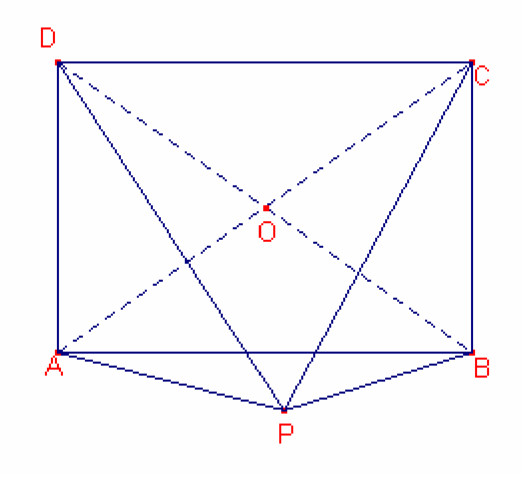
$2x^2 - 2y^2 - 4ax + a^2 = 0$.

$$-\frac{(x-a)^2}{\frac{3a^2}{2}} + \frac{y^2}{\frac{3a^2}{2}} = 1$$

És una hipèrbola equilàtera:



2.- Demostreu que el centre d'un rectangle és el punt on la suma de distàncies als vèrtexs del rectangle és mínima.
Oposicions Catalunya 1993.



Solució:
Considerem el rectangle ABCD.
Siga O el centre del rectangle, intersecció de les dues diagonals.
$\overline{AC} = \overline{BD} = 2 \cdot \overline{OA} = 2 \cdot \overline{OB} = 2 \cdot \overline{OC} = 2 \cdot \overline{OD}$.

Siga un P del plànol.

Aplicant la desigualtat triangular al triangle $\overset{\Delta}{ACP}$:
$\overline{AC} \leq \overline{AP} + \overline{CP}$, donant-se la igualtat quan A, P, C estan alineats i P entre A i C.
Aleshores,
$\overline{OA} + \overline{OC} \leq \overline{AP} + \overline{CP}$ (1)

Aplicant la desigualtat triangular al triangle $\overset{\Delta}{BDP}$:
$\overline{BD} \leq \overline{BP} + \overline{DP}$, donant-se la igualtat quan B, P, D estan alineats i P entre B i D.
Aleshores,
$\overline{OB} + \overline{OD} \leq \overline{BP} + \overline{DP}$ (2)

sumant les expressions (1) i (2).
$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} \leq \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} + \overline{DP}$
La igualtat es dona quan P està alineat amb A i C i està alineat amb B, D, és a dir, quan P és el centre del rectangle.

3.- Les rectes tangents a la paràbola $y^2 = 4x$ en els punts $y = 4$, $y = 6$ formen amb la recta que uneix aquests punts un triangle. Calculeu la seua àrea.
Oposicions Catalunya 1999.

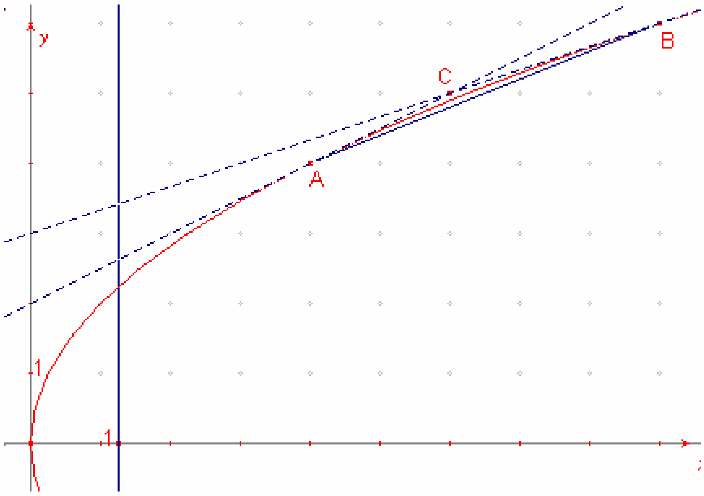
Solució:

Si $y = 4$, $4^2 = 4x$, aleshores, $x = 4$. El punt de la paràbola és $A = (4,4)$

Si $y = 6$, $6^2 = 4x$, aleshores, $x = 9$. El punt de la paràbola és $B = (9,4)$

Si $f(x) = \sqrt{4x}$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$



Determinem l'equació de la recta tangent a la paràbola en el punt $A = (4,4)$.

La pendent de la recta tangent és

$$f'(4) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$$

L'equació de la recta és:

$$r \equiv y - 4 = \frac{1}{2}(x - 4)$$

Determinem l'equació de la recta tangent a la paràbola en el punt $B = (9,4)$.

La pendent de la recta tangent és $f'(9) = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$.

L'equació de la recta és:

$$s \equiv y - 4 = \frac{1}{3}(x - 9)$$

Calculem el punt C intersecció de les rectes r i s, resolent el sistema format per ambdues equacions:

$\begin{cases} y - 4 = \frac{1}{2}(x - 4) \\ y - 4 = \frac{1}{3}(x - 9) \end{cases}$, la solució del qual és $\begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases}$. El punt intersecció és C(6,5)

Calculem l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\vec{AB} = (5,2)$, $c = \left\|\vec{AB}\right\| = \sqrt{29}$.

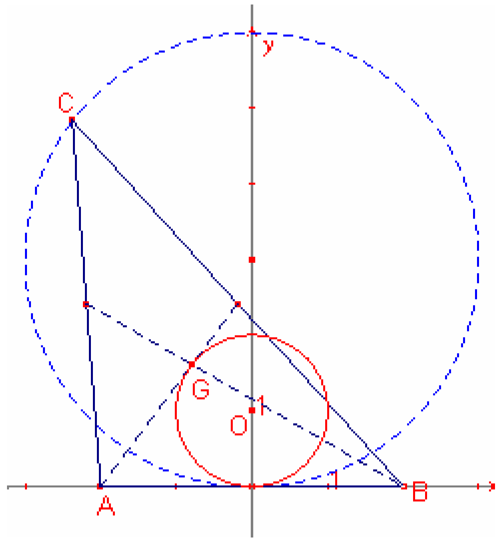
$\vec{AC} = (2,1)$, $b = \left\|\vec{AC}\right\| = \sqrt{5}$.

$\cos A = \dfrac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\left\|\vec{AB}\right\| \cdot \left\|\vec{AC}\right\|} = \dfrac{12}{\sqrt{145}}$. Aleshores, $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \dfrac{1}{\sqrt{145}}$.

L'àrea és:

$$S_{ABC} = \frac{bc \cdot \sin A}{2} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{29}\frac{1}{\sqrt{145}}}{2} = \frac{1}{2}.$$

4.- Els punts $A(-2{,}0)$ i $B(2{,}0)$ són vèrtexs d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ en què el vèrtex C recorre la circumferència d'equació $x^2+y^2-6y=0$. Determineu l'equació del lloc geomètric del baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ al variar C sobre la circumferència donada.
Opos Catalunya 1999.



Solució:
Siga $C(a,b)$ de la circumferència donada,
aleshores, $a^2+b^2-6b=0$ (1)
El baricentre G del triangle té coordenades:

$$G\left(\frac{-2+2+a}{3},\frac{0+0+b}{3}\right).$$

$$G\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3}\right).$$

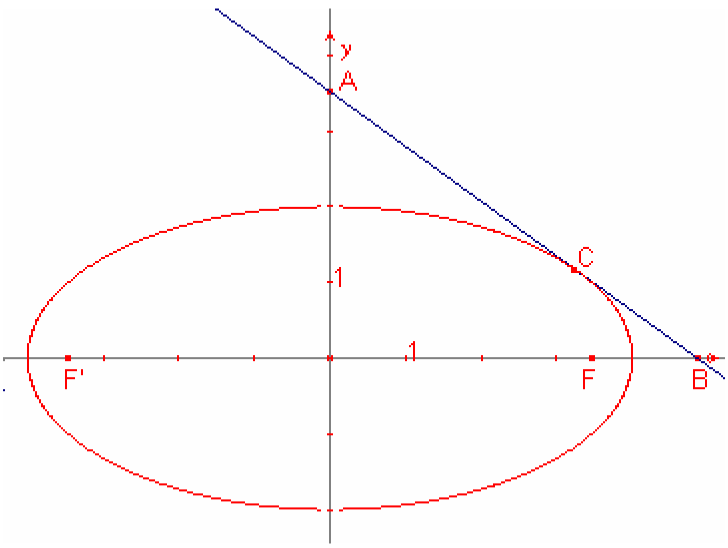
Siga $x=\frac{a}{3}$, $y=\frac{b}{3}$. Aleshores, $a=3x, b=3y$
Substituint en l'equació (1):
$(3x)^2+(3y)^2-6\cdot 3y=0$. Simplificant, els baricentres $G(x,y)$ satisfan l'equació:
$x^2+y^2-2y=0$.
Aquesta equació és una circumferència de centre $O(0{,}1)$ i radi $r=1$.
En forma reduïda: $x^2+(y-1)^2=1^2$.

5.- Una recta r talla l'eix d'ordenades en el punt A i l'eix d'abscisses en el punt B, de manera que la distància $\overline{AB} = 6cm$ un tercer punt C està situat sobre la recta r de manera que $\overline{BC} = 2cm$.
a) Demostreu que en moure la recta r de manera que el punt A estiga sobre l'eix d'ordenades i B sobre d'eix d'abscisses el punt C determina una el·lipse.
b) Obteniu l'equació, la distància focal, els semieixos i l'excentricitat de l'el·lipse.
Oposicions Catalunya 1998.

Solució:
Siga $A(0,a)$, $B(b,0)$
$\overline{AB} = 6cm$, aleshores, $a^2 + b^2 = 6^2$ (1)
Siga $C(x,y)$ sobre la recta r
C està alineat amb A i B tal que $\overrightarrow{BA} = 3 \cdot \overrightarrow{BC}$:
$(-b,a) = 3(x-b,y)$
Igualant les components dels vectors:

$\begin{cases} 3x - 3b = -b \\ 3y = a \end{cases}$, resolent en les incògnites a, b: $\begin{cases} a = 3y \\ b = \dfrac{3}{2}x \end{cases}$ (2)

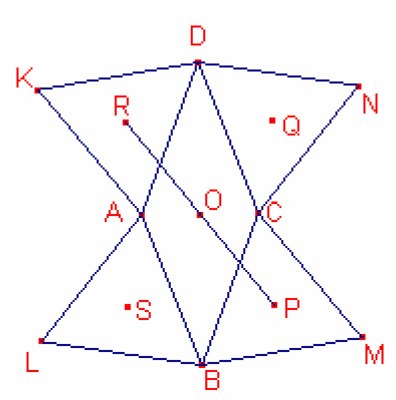
Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):
$(2y)^2 + \left(\dfrac{3}{2}x\right)^2 = 36$. Simplificant:
Les coordenades de $C(x,y)$ compleixen que $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$.
Aquesta equació és una el·lipse:
Els semieixos són:
$a = 4$
$b = 2$
La semidistància focal és c tal que
$a^2 = b^2 + c^2$
Aleshores, $c = \sqrt{12}$.
L'excentricitat és:
$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{12}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



6.- En un rombe de diagonals d i D es construeix sobre cada costat un triangle equilàter. S'uneixen els centres dels 4 triangles equilàters obtenint un rectangle. Obteniu la diagonal d'aquest rectangle.
Oposicions Catalunya 2000.

Solució:
Equacions del gir:
Siga $C(a,b)$ el centre del gir i α l'angle.
Siga $P'(x',y')$ les imatges de $P(x,y)$ pel gir de centre C i angle α.
Les equacions venen donades pel sistema:

$$\begin{cases} x' = a + (x-a)\cos\alpha - (y-b)\sin\alpha \\ y' = b + (x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{cases}.$$



Siga el rombe ABCD de centre O. De coordenades:

$$O(0,0),\ A\left(\frac{-d}{2},0\right),\ B\left(0,\frac{-D}{2}\right),\ C\left(\frac{d}{2},0\right),\ D\left(0,\frac{D}{2}\right).$$

Siga el triangle equilàter construït sobre el costat $\overline{BC}$ $\overset{\Delta}{BMC}$.
M és el transformat pel gir de centre B i angle -60^o del punt C.
Les coordenades de M són:

$$\begin{cases} x' = 0 + \left(\frac{d}{2} - 0\right)\cos(-60^o) - \left(0 - \frac{-D}{2}\right)\sin(-60^o) \\ y' = \frac{-D}{2} + \left(\frac{d}{2} - 0\right)\sin(-60^o) + \left(0 - \frac{-D}{2}\right)\cos(-60^o) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{d + D\sqrt{3}}{4} \\ y' = \frac{-D - d\sqrt{3}}{4} \end{cases},\qquad M\left(\frac{d+D\sqrt{3}}{4}, \frac{-D-d\sqrt{3}}{4}\right).$$

Siga P el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{BMC}$ les seues coordenades són:

$$P\left(\frac{0 + \frac{d+D\sqrt{3}}{4} + \frac{d}{2}}{3}, \frac{\frac{-D}{2} + \frac{-D-d\sqrt{3}}{4} + 0}{3}\right).$$

$$P\left(\frac{3d + D\sqrt{3}}{12}, \frac{-3D - d\sqrt{3}}{12}\right).$$

Siga PQRS el rectangle que formen els baricentres dels 4 triangles equilàters.
El centre del rectangle és O el centre del rombe.
La diagonal és $\overline{PR} = 2 \cdot \overline{OP}$.

$$\overline{OP} = \sqrt{\left(\frac{3d + D\sqrt{3}}{12}\right)^2 + \left(\frac{-3D - d\sqrt{3}}{12}\right)^2} = \sqrt{\frac{12\left(d^2 + D^2 + \sqrt{3}dD\right)}{12^2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{d^2 + D^2 + dD\sqrt{3}}$$

$$\overline{PR} = 2 \cdot \overline{OP} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{d^2 + D^2 + dD\sqrt{3}}.$$

7.- Siga la famíla d'el·lipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ que passen pel punt $(1,1)$. Es demana:
a) L'el·lipse d'aquesta família d'àrea mínima.
b) L'el·lipse de la família que genera un volum mínim al girar al voltant de l'eix d'abscisses.
Oposicions Catalunya 1998.

Solució:
La família d'el·lipses passa pel punt $(1,1)$, aleshores, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$.

La fórmula paramètrica de l'el·lipse és $\begin{cases} x = a\cdot\cos t \\ y = b\cdot\sin t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$

a)
Calculem l'àrea de l'el·lipse:

$$S=\left|\int_0^{2\pi} b\cdot\sin t(-a\cdot\sin t)dt\right| = ab\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt=\pi ab\ .$$

$$S(a)=\pi\frac{a^2}{\sqrt{a^2-1}}$$

Derivem la funció:

$$S'(a)=\frac{a(a^2-2)}{(a^2-1)\sqrt{a^2-1}}\ ,\quad S''(a)=\frac{a^2+2}{(a^2-1)^2\sqrt{a^2-1}}$$

$S'(a)=0$, $a=\sqrt{2}$

$S''(\sqrt{2})>0$

aleshores, $a=\sqrt{2}$ és un mínim. En aquest cas $b=\sqrt{2}$

L'el·lipse d'àrea mínima és: $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=1$ que és una circumferència.

b)
Calculem el volum de revolució:

$$y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V=2\pi\int_0^a y^2dx=2\pi\int_0^a\left(b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right)dx=\frac{4}{3}\pi ab^2\ .$$

$$V(a)=\frac{4}{3}\pi a\frac{a^2}{a^2-1}=\frac{4}{3}\pi\frac{a^3}{a^2-1}\ .$$

Derivem la funció:

$$V'(a)=\frac{4}{3}\pi\frac{a^2(a^2-3)}{(a^2-1)^2}\ .\quad V''(a)=\frac{4}{3}\pi\frac{a(a^4+8a^2+3)}{(a^2-1)^4}$$

$V'(a)=0$, $a=\sqrt{3}$, aleshores, $b=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

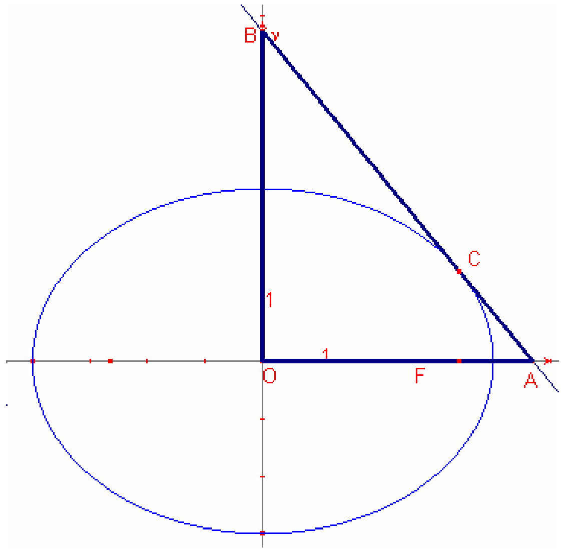
$V''(\sqrt{3})>0$, aleshores $a=\sqrt{3}$ és un mínim.

L'el·lipse d'àrea mínima és: $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{\frac{3}{2}}=1$.

8.- Donada l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, quin és el triangle rectangle d'àrea mínima que té els catets sobre els eixos (positius) OX OY i la hipotenusa és tangent a l'el·lipse?.
Oposicions Catalunya 2000.

Solució:

Siga $C\left(c,\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2}\right)$ un punt de l'el·lipse en el primer quadrant, ($c>0$).



Calculem la recta tangent a l'el·lipse en el punt C.
La part superior de l'el·lipse és la funció

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

La seua derivada és:

$$y'=\frac{-b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Calculem $y'(c)$ el pendent de la recta tangent en el punt C:

$y'(c)=\frac{-b}{a}\frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}$. La recta tangent és:

$$r\equiv y-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2}=\frac{-b}{a}\frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}(x-c)$$

Calculem els punts de tall de la recta r amb els eixos coordenats que ens donaran els vèrtexs del triangle que cerquem:

Si $y=0$, aleshores, $x=\frac{a^2}{c}$. Per tant $A\left(\frac{a^2}{c},0\right)$

Si $x=0$, aleshores, $y=\frac{ab}{\sqrt{a^2-c^2}}$. Per tant $B\left(0,\frac{ab}{\sqrt{a^2-c^2}}\right)$.

Calculem l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OAB}$:

$$S_{OAB}=\frac{\frac{a^2}{c}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2-c^2}}}{2}=\frac{a^3b}{2}\left(a^2c^2-c^4\right)^{\frac{-1}{2}}.$$

Considerem la funció $S(c)=\frac{a^3b}{2}\left(a^2c^2-c^4\right)^{\frac{-1}{2}}$.

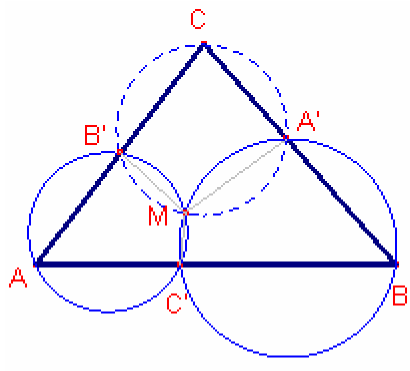
$$S'(c)=\frac{a^3b}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(a^2c^2-c^4\right)^{\frac{-3}{2}}\left(2a^2c-4c^3\right)$$

$S'(c)=0$ si $c=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Amb la segona derivada podem veure que $c=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ és un mínim.

9.- Donat un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i tres punts A', B', C' sobre els costats $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$,

respectivament, les circumferències circumscrites als triangles $\overset{\Delta}{AC'B'}$, $\overset{\Delta}{BA'C'}$, $\overset{\Delta}{CA'B'}$ concorren en un punt M que s'anomena punt Miquel (Auguste Miquel 1883, matemàtic francés).

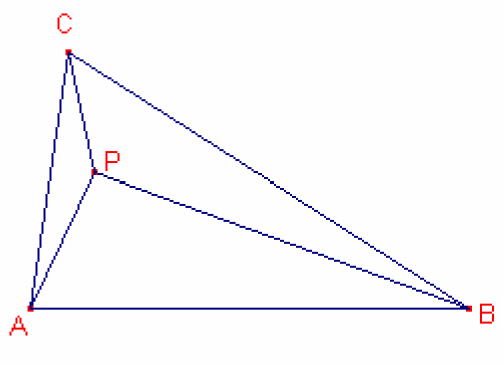


Solució:
Siga M la intersecció de les circumferències circumscrites als triangles $\overset{\Delta}{AC'B'}$, $\overset{\Delta}{BA'C'}$.
El quadrilàter AC'MB' és cíclic, pel teorema de Tolomeu, els angles oposats del quadrilàter són suplementaris, aleshores,
$\angle C'MB' = 180^{o} - A$
El quadrilàter BA'MC' és cíclic, pel teorema de Tolomeu, els angles oposats del quadrilàter són suplementaris, aleshores,
$\angle C'MA' = 180^{o} - B$
$\angle B'MA' = 360^{o} - (\angle C'MB' + \angle C'MA') = A + B = 180^{o} - C$
Els angles $\angle B'MA'$ i l'angle $\angle B'CA'$ del quadrilàter CB'MA' són suplementaris, aplicant el teorema de Tolomeu, el quadrilàter CB'MA' és cíclic, per tant M pertany a la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{CA'B'}$.

Nota: Si els punts A', B', C' pertanyen a la prolongació dels costats el teorema de Miquel també s'acompliria i la demostració seria anàloga.

10.- Demostreu que la suma de les distàncies d'un punt interior a un triangle als tres vèrtexs és superior a la meitat del perímetre i inferior al perímetre.
Oposicions Catalunya 1998.

Solució:



Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga P interior al triangle.

Aplicant la desigualtat triangular al triangle $\overset{\Delta}{ABP}$:
$\overline{PA}+\overline{PB}>c$

Aplicant la desigualtat triangular al triangle $\overset{\Delta}{ACP}$:
$\overline{PA}+\overline{PC}>b$

Aplicant la desigualtat triangular al triangle $\overset{\Delta}{BCP}$:
$\overline{PB}+\overline{PC}>a$
Sumant les tres desigualtats:
$2\left(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}\right)>a+b+c$.
$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}>\frac{a+b+c}{2}.$$

El triangle $\overset{\Delta}{ABP}$ és interior al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, aleshores, el perímetre de $\overset{\Delta}{ABP}$ és menor que el perímetre de $\overset{\Delta}{ABC}$, per tant:
$\overline{PA}+\overline{PB}+c<a+b+c$.
Simplificant:
$\overline{PA}+\overline{PB}<a+b$ (1)
Anàlogament:
$\overline{PA}+\overline{PC}<a+c$ (2)
$\overline{PB}+\overline{PC}<b+c$ (3)
Sumant les tres desigualtats (1), (2) (3):
$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}<a+b+c$.