1.- Considerem un ortoedre de base un quadrat de costat a. Siguen A, B, C, D els vèrtexs del quadrat d'una de les bases i A', B', C', D' els corresponents a l'altra base. Considerem M el punt mig del segment $\overline{AB}$ i N el punt mig del $\overline{B'C'}$. Construïm un triangle de vèrtexs els punts M, C i P essent P un punt variable del segment $\overline{ND'}$.

a) Calculeu la posició del punt P de manera que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MCP}$ siga mínima.

b) Calculeu la posició del punt P de manera que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MCP}$ siga màxima.

Oposicions Catalunya 2000.

Solució:

Siga $b=\overline{AA'}$ l'altura de l'ortoedre.

Considerem l'ortoedre en les següents coordenades cartesianes.

$A(0,0,0)$, $B(0,a,0)$, $C(-a,a,0)$, $D(-a,0,0)$. $A'(0,0,b)$, $B'(0,a,b)$, $C'(-a,a,b)$, $D'(-a,0,b)$.

El punt mig M del segment $\overline{AB}$ té coordenades: $M\left(0,\frac{a}{2},0\right)$.

N el punt mig del $\overline{B'C'}$ té coordenades: $N\left(\frac{-a}{2},a,b\right)$.

$\overrightarrow{D'N}=\left(\frac{a}{2},a,0\right)$

L'equació de la recta que passa pels punts D' i N té per equació:

$r\equiv(x,y,z)=(-a,0,b)+\alpha(1,2,0)$

Un punt P en el segment $\overline{ND'}$ té coordenades: $P(-a+\alpha,2\alpha,b)$, $\quad 0\le\alpha\le\frac{a}{4}$.

$\overrightarrow{MC}=\left(-a,\frac{a}{2},0\right)$, $\overrightarrow{MP}=\left(-a+\alpha,2\alpha-\frac{a}{2},b\right)$.

Calculem l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MCP}$,

$$S_{MCP}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MC}\times\overrightarrow{MP}\right\|,\qquad \overrightarrow{MC}\times\overrightarrow{MP}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -a & \frac{a}{2} & 0\\ -a+\alpha & 2\alpha-\frac{a}{2} & b\end{vmatrix}=\left(\frac{ab}{2},ab,\frac{-5a}{2}\alpha+a^2\right).$$

$$S_{MCP}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MC}\times\overrightarrow{MP}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{ab}{2}\right)^2+(ab)^2+\left(\frac{-5a}{2}\alpha+a^2\right)^2}.$$

L'àrea del triangle al quadrat és una paràbola en $0\le\alpha\le\frac{a}{4}$.

El mínim està en el vèrtex i el màxim en un dels extrems de α.

El mínim s'assoleix quan $\alpha=\frac{2a}{5}$ el punt P té coordenades $P\left(\frac{-3a}{5},\frac{4a}{5},b\right)$, l'àrea mínima és $S_{mín}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5a^2b^2}{4}}$

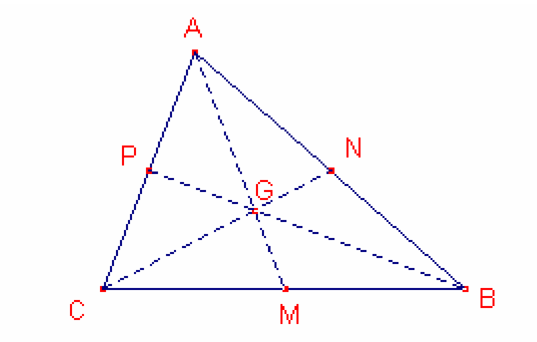
Si $\alpha=0$, $S(0)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5a^2b^2}{4}+a^4}$. Si $\alpha=\frac{a}{2}$, $S\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5a^2b^2}{4}+\frac{8}{64}a^4}$

$S(0)>S\left(\frac{a}{4}\right)$. Aleshores el màxim s'assoleix quan $\alpha=0$.

Les coordenades del màxim són: $P(-a,0,b)$.

2.- Demostreu que en tot triangle la suma de les mitjanes és major que $\frac{3}{4}$ del perímetre, però menor que el perímetre.
Oposicions Catalunya 1999.

Solució:
Siguen les mitjanes $\overline{AM} = m_a$ $\overline{CN} = m_c$ $\overline{BR} = m_b$. Siga el baricentre G.
Siguen $S = m_a + m_b + m_c$ $P = a + b + c$



Considerem el triangle $\overset{\Delta}{CGB}$ $\frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c > a$

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{AGC}$ $\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_c > b$

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{AGB}$ $\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b > c$

Sumant les 3 inequacions:
$\frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c) > a + b + c \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}S > P$

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{AMN}$ $m_a < \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{BNR}$ $m_b < \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}a$

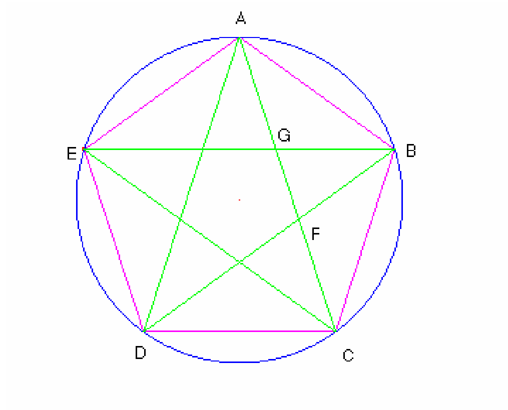
Considerem el triangle $\overset{\Delta}{CNR}$ $m_c < \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$

Sumant les desigualtats:
$m_a + m_b + m_c < a + b + c \quad \Rightarrow \quad S < P$

El nombre d'or en el pentàgon.

Demostreu que la proporció entre la diagonal i el costat d'un pentàgon regular és el nombre d'or $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Demostració 1:



Siga el pentàgon regular de costat $\overline{AB} = a$

Siga la diagonal del pentàgon $\overline{AC} = d$

Per ser inscrits en la circumferència, els angles

$\angle BAC = \dfrac{\frac{360^o}{5}}{2} = 36^o$ $\qquad \angle ABC = \dfrac{3\frac{360^o}{5}}{2} = 108^o$

L'angle $\angle ACB = 36^o$

Els angles $\angle ABF = 72^o$, $\angle AFB = 180^o - (36^o + 72^o) = 72^o$,

El triangle $\overset{\Delta}{ABF}$ és isòsceles, per tant, $\overline{AF} = \overline{AB} = a$

Per ser inscrit en la circumferència, l'angle $\angle CBF = \dfrac{\frac{360^o}{5}}{2} = 36^o$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overset{\Delta}{BFC}$ són semblants:

Pel teorema de Tales:

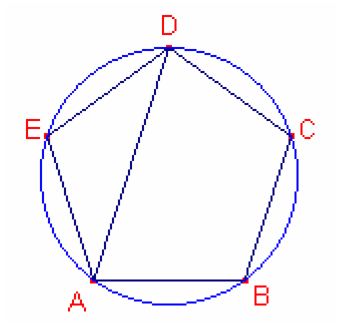
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FC}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{a} = \frac{a}{d-a} \quad \Rightarrow \quad a^2 = d(d-a) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d^2 - ad - a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = a\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Per tant, $\dfrac{d}{a} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Nota: el valor negatiu de la solució no és vàlid perquè la diagonal és positiva.

Demostració 2:



Tot polígon regular està inscrit en una circumferència.

Considerem el pentàgon regular ABCDE

Siga $a = \overline{AB}$, $d = \overline{AD}$.

Aplicant el teorema de Ptolomeu al quadrilàter inscriptible ABCD:

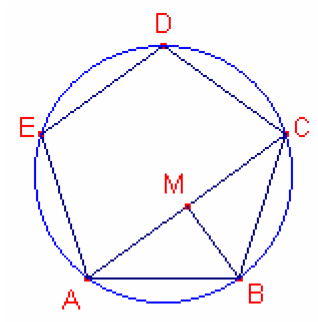
$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$.

$d^2 = a^2 + ad$

Dividint per a^2: $\left(\dfrac{d}{a}\right)^2 - \dfrac{d}{a} - 1 = 0$

Resolent l'equació en la incògnita $\dfrac{d}{a}$: $\dfrac{d}{a} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$.

Demostració 3:



Considerem el pentàgon regular ABCDE.

Siga $a = \overline{AB}$, $d = \overline{AC}$.

$\angle CAB = \angle ACB = 36^o$ (per ser angles inscrits en una circumferència i abraçar un arc de $\dfrac{360^o}{5} = 72^o$).

$\angle ABC = 108^o$.

El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles. Siga M el punt mig del segment $\overline{AC}$.

El triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ és rectangle. Aplicant raons trigonomètriques:

$$\cos 36^o = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{d}{2a} \quad (1)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{d}{a} = \frac{\sin 108^o}{\sin 36^o} = \frac{\sin(72^o+36^o)}{\sin 36} = \frac{\sin 72^o \cos 36^o + \sin 36^o \cos 72^o}{\sin 36^o} =$$

$$= \frac{2\sin 36^o \cos 36^o + \sin 36^o(\cos^2 36^o - \sin^2 36^o)}{\sin 36^o} =$$

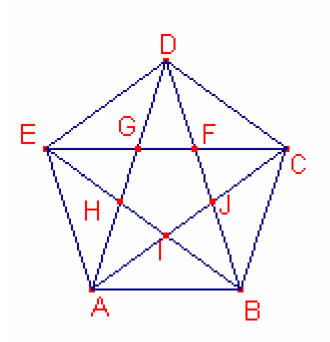
$$= 4\cos^2 36^o - 1.$$

Substituint l'expressió (1): $\frac{d}{a} = 4\left(\frac{d}{2a}\right)^2 - 1$

Simplificant: $\left(\frac{d}{a}\right)^2 - \frac{d}{a} - 1 = 0$

Resolent l'equació en la incògnita $\frac{d}{a}$: $\quad \frac{d}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$.

3.- Considerem un pentàgon regular. En traçar les diagonals es forma en el seu interior un nou pentàgon regular. Quina és la relació entre les àrees dels dos pentàgons. Oposicions Catalunya 1993.



Solució:

Siga el pentàgon regular ABCDE, $a = \overline{AB}$.
La proporció entre la diagonal i el costat del pentàgon és el nombre d'or $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{CFD}$, $\overset{\Delta}{ADE}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AE}}, \quad \frac{a}{a\Phi} = \frac{\overline{DF}}{a}, \quad \overline{DF} = \frac{a}{\Phi}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{GFD}$, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{GF}}{\overline{DF}}, \quad \overline{GF} = \frac{a}{\Phi^2}.$$

Els pentàgons ABCDE, FGHIJ són semblants, aleshores, les àrees són proporcionals al quadrat de la proporció dels costats.

$$\frac{S_{ABCDE}}{S_{FGHIJ}} = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{GF}}\right)^2 = \left(\frac{a}{\frac{a}{\Phi^2}}\right)^2 = \Phi^4.$$

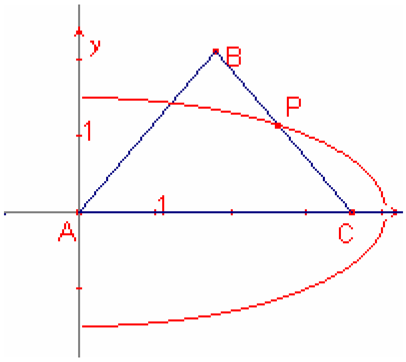
4.- Siguen dos segments $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ d'igual longitud d i articulats pel punt B. El punt a està sobre l'origen de coordenades i el C varia sobre la part positiva de l'eix OX.
Determineu l'equació del lloc geomètric d'un punt P situat sobre el segment $\overline{BC}$ a una distància p del punt C. Dibuixeu el lloc geomètric.
Oposicions Catalunya 2000

Solució:
Siga $A(0,0)$, $C(a,0)$, $a \geq 0$

Aplicant el teorema de Pitàgores, $B\left(\frac{a}{2},+\sqrt{d^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)$ o $B'\left(\frac{a}{2},-\sqrt{d^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)$.

Siga $P(x,y)$ sobre el segment $\overline{BC}$ tal que $p = \overline{CP}$.

Aleshores, $d \cdot \vec{CP} = p \cdot \vec{CB}$



$$d(x-a, y-0) = p\left(\frac{-a}{2},-\sqrt{d^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right).$$

Igualant les coordenades dels vectors:

$$\begin{cases} dx - da = -p\dfrac{a}{2} \\ dy = -p\sqrt{d^2 - \dfrac{a^2}{4}} \end{cases}$$

Aïllant a de la primera equació:

$$\begin{cases} a = \dfrac{2dx}{2d-p} \\ dy = -p\sqrt{d^2 - \dfrac{a^2}{4}} \end{cases}$$

Substituint el valor de a en la segona equació i elevant al quadrat:

$$d^2y^2 = p^2\left(d^2 - \frac{4d^2x^2}{4(2d-p)^2}\right)$$

Simplificant:

$$\frac{x^2}{(2d-p)^2} + \frac{y^2}{p^2} = 1.$$

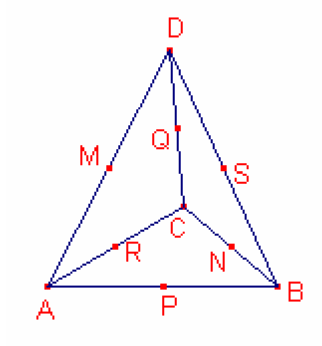
És mitja el·lipse (ja que a només recorre l'eix positiu d'abscisses) de semieixos $2d-p, p$.

5.- Demostreu que les rectes que uneixen punts mitjans d’arestes oposades d’un tetràedre passen per un mateix punt.
Oposicions Catalunya 1999.

Solució:
Siga el tetràedre de vèrtex A, B, C, D.
Els punts A, B, C, D no són coplanaris, per tant els vectors $\{\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}\}$ són base de R^3.

Siga M el punt mig de $\overline{AD}$, siga N el punt mig de $\overline{BC}$. $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Les component del vector $\vec{AM}$ referides a la base $\{\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}\}$ són:



$$\overrightarrow{AM}=\left(0,0,\frac{1}{2}\right).$$

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Les component del vector $\vec{AN}$ referides a la base $\{\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}\}$ són:

$\overrightarrow{AN}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$. Aleshores, $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)$

La recta que passa pels punts M, N té equació:

$$r_{MN}\equiv(x,y,z)=\left(0,0,\frac{1}{2}\right)+\alpha(1,1,-1).$$

Siga P el punt mig de $\overline{AB}$, siga Q el punt mig de $\overline{CD}$

Les components de $\vec{AP}$ referides a la base $\{\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}\}$ són: $\overrightarrow{AP}=\left(\frac{1}{2},0,0\right)$.

Les components de $\overrightarrow{AQ}$ referides a la base $\{\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}\}$ són: $\overrightarrow{AQ}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

La recta que passa pels punts P, Q té equació:

$$r_{PQ}\equiv(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},0,0\right)+\alpha(-1,1,1).$$

La intersecció de les rectes r_{MN},r_{PQ} és el punt O de components referides a aquesta base $\{A,\{\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}\}\}$, $O\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$

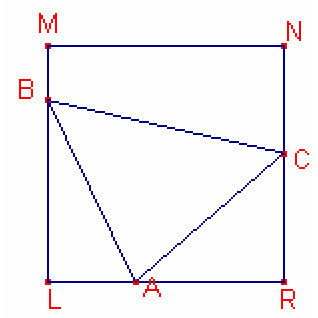
Siga R el punt mig de $\overline{AC}$, siga S el punt mig de $\overline{BD}$
La recta que passa per R, S té equació:

$$r_{RS}\equiv(x,y,z)=\left(0,\frac{1}{2},0\right)+\alpha(1,-1,1).$$

Notem que el+ punt $O\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ pertany a la recta r_{RS}.

Aleshores, les tres rectes s’intersecten en $O\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

6.- Sobre un quadrat LMNR de costat 1 tenim tres punts A, B, C tals que les figures ALB, ARC i BMNC tenen la mateixa àrea.



Calculeu l'àrea màxima i mínima del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Oposicions Catalunya 1998.

Solució:
Siga $x = \overline{LA}$, $y = \overline{LB}$, $z = \overline{RC}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $S_{ABC} = S_{LMNR} - 3 \cdot S_{LAB} = 1^2 - 3\dfrac{xy}{2}$.

$S_{LAB} = S_{ARC}$, $\dfrac{xy}{2} = \dfrac{(1-x)z}{2}$ (1)

$S_{LAB} = S_{BCNM}$, $\dfrac{xy}{2} = \dfrac{(1-y)+(1-z)}{2} \cdot 1$ (2)

Considerem el sistema format per (1) i (2):

$\begin{cases} xy = (1-x)z \\ xy = 2-y-z \end{cases}$. Resolent el sistema en les incògnites y, z:

$\begin{cases} y = \dfrac{2x-2}{x^2-x-1} \\ z = -\dfrac{2x}{x^2-x-1} \end{cases}$ $0 \le y \le 1,\ \ 0 \le z \le 1$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ en funció de x és:

$S(x) = 1 - \dfrac{3}{2}x\dfrac{2x-2}{x^2-x-1}$. El domini és $\left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$

$S'(x) = \dfrac{3(2x-1)}{(x^2-x-1)^2}$.

$S'(x) = 0$ si $x = \dfrac{1}{2}$

$S'(x) > 0$, si $x \in \left]\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$. $S'(x) < 0$, si $x \in \left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$.

Aleshores, $x = \dfrac{1}{2}$ és un mínim. $S\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{5}$.

El màxim s'assoleix en els extrems $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$S\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{-5+3\sqrt{5}}{4} \approx 0'4271$.

$S\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{-5+3\sqrt{5}}{4} \approx 0'4271$.

Aleshores, $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ són els dos màxims.

7.- Tres esferes del mateix radi estan sobre una taula de tal manera que cadascuna està en contacte amb les altres dues. Determineu el radi de l'esfera més gran possible que es pot situar entre la taula i les altres esferes.
Oposicions Catalunya 1993.

Solució:
L'esfera que busquen serà la tangent a les tres esferes i tangent a la taula.
Siga R el radi de les tres esferes iguals i tangents entre elles

Siga r el radi de la 4 esfera situada entre les altres esferes.

Els centres de les 3 esferes tangents formen un triangle equilàter de costat 2R.
Els centres de les 4 esferes formen un tetràedre recte de base un triangle equilàter de costat 2R i d'arestes laterals $R+r$.
L'altura del tetràedre és $R-r$.
Aquesta altura té per base el baricentre del triangle.

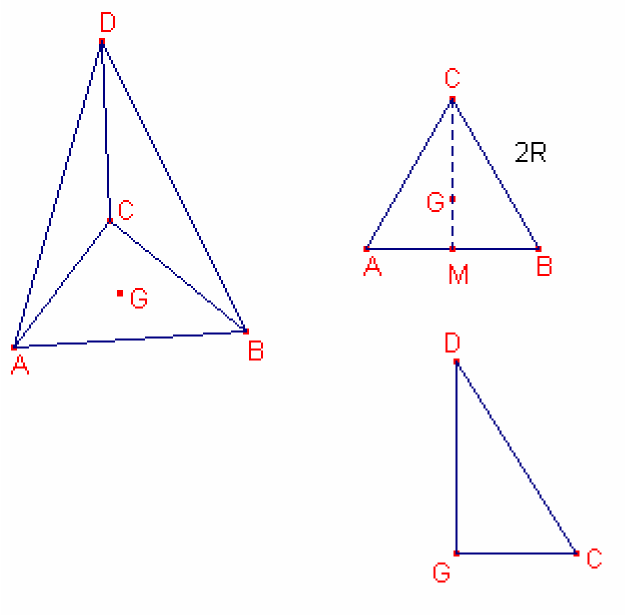
La mitjana del triangle equilàter que forma la base és aplicant el teorema de Pitàgores:
$\overline{CM}=\sqrt{(2R)^2-R^2}=R\sqrt{3}$
Per la propietat del baricentre:
$\overline{CG}=\frac{2}{3}\overline{CM}=\frac{2\sqrt{3}}{3}R$.

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{CGD}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$\overline{CD}=R+r$, $\overline{DG}=R-r$:

$$(R+r)^2=(R-r)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R\right)^2.$$

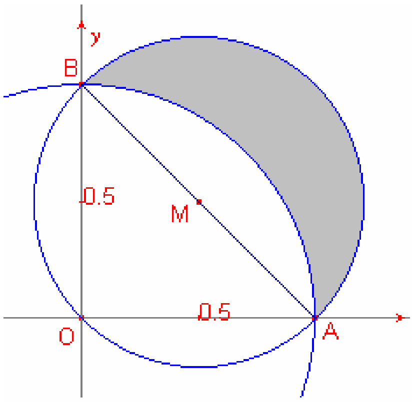
$4rR=\frac{4}{3}R^2$.

Aleshores, $r=\frac{1}{3}R$



8.- Considerem el cercle C_1 de centre O(0,0) i radi q.
Siga M el punt mig del segment d'extrems A(0,1), B(1,0).
Considerem el cercle C_2 de centre M i diàmetre $\overline{AB}$.
Calculeu l'àrea de la superfície L de la regió en forma de quart de lluna que s'obté al treure a C_2 la part comuna amb C_1 (lúnula d'Hipòcrates).
Oposicions Catalunya 1999.

Solució:
L'àrea de la lúnula d'Hipòcrates és igual a l'àrea de la semicircercle de centre M i diàmetre $\overline{AB}$ menys l'àrea del quart de centre O i radi 1 més l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OAB}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

L'àrea del semicercle de centre M i diàmetre $\overline{AB}$ és:

$$S_1 = \frac{\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

L'àrea del quart de cercle de centre O i radi 1 és:

$$S_2 = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és:

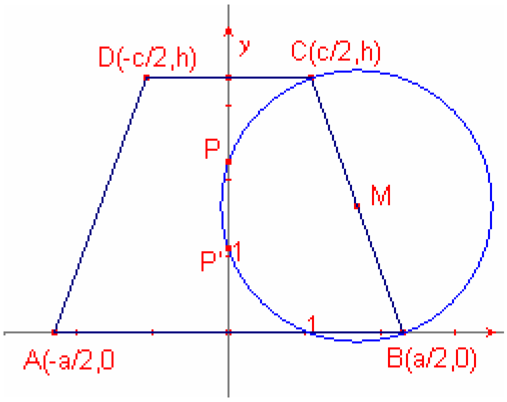
$$S_3 = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

L'àrea de la lúnula és:

$$L = S_1 - S_2 + S_3 = \frac{1}{2}.$$

9.- Siga un trapezi isòsceles amb bases a i c i altura h.
a) Sobre l'eix de simetria d'aquest trapezi, determineu els punts P des dels quals es veuen els costats iguals del trapezi sota un angle recte, calculant la distància de P a cada base.
b) Determineu en quines condicions existeix P (discutiu els diversos casos que es poden donar.
Oposicions Catalunya 2000

Solució:
Considerem el trapezi isòsceles ABCD amb les següents coordenades:
$A\left(\frac{-a}{2},0\right)$, $B\left(\frac{a}{2},0\right)$, $C\left(\frac{c}{2},h\right)$, $D\left(\frac{-c}{2},h\right)$



L'eix de simetria del trapezi és l'eix d'ordenades,
$x = 0$
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$. Les coordenades de M són:
$M\left(\frac{a+c}{4},\frac{h}{2}\right)$.
El problema tindrà solució si la circumferència de centre M i diàmetre $\overline{BC}$ talla l'eix de simetria.

Determinem l'equació de centre M i diàmetre $\overline{BC}$.
El radi r acompleix, aplicant el teorema de Pitàgores:

$$r^2 = \frac{h^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2}{4} = \frac{4h^2 + (a-c)^2}{16}.$$

L'equació de la circumferència és:

$$\left(x - \frac{a+c}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{h}{2}\right)^2 = \frac{4h^2 + (a-c)^2}{16}.$$

Determinem la intersecció de l'eix de simetria i la circumferència:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \left(x - \frac{a+c}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{h}{2}\right)^2 = \frac{4h^2 + (a-c)^2}{16} \cdot \end{cases}$$

$$\frac{(a+c)^2}{16} + \left(y - \frac{h}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{4} + \frac{(a-c)^2}{16}.$$

$\left(y - \frac{h}{2}\right)^2 = \frac{h^2 - ac}{4}$. Aleshores, $y = \frac{h}{2} \pm \frac{\sqrt{h^2 - ac}}{2}$.

Els problema té 2 solucions si $h^2 - ac > 0$. Els punts solució són $P\left(0,\frac{h+\sqrt{h^2-ac}}{2}\right)$ i

$P'\left(0,\frac{h-\sqrt{h^2-ac}}{2}\right)$

El problema té 1 solució si $h^2 - ac = 0$. El punt solució és, $P\left(0,\frac{h}{2}\right)$.

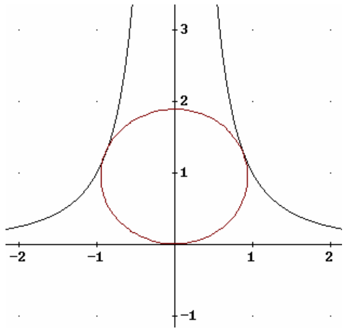
El problema no té solució si $h^2 - ac < 0$.

10.- Determineu el lloc geomètric dels punts del plànol P(x,y), tal que les rectes tangents de de P a la corba $x^2y=1$ són perpendiculars.
Oposicions Catalunya 1998.

Solució:

La corba en forma explícita té equació, $y=\dfrac{1}{x^2}$. $y'=\dfrac{-2}{x^3}$.

Siguen $Q\left(c,\dfrac{1}{c^2}\right)$, $R\left(d,\dfrac{1}{d^2}\right)$ de la corba tal que $\angle QPR=90^{\circ}$ i les rectes PQ, PR són tangents a la corba.



$\overrightarrow{PQ}=\left(c-x,\dfrac{1}{c^2}-y\right)$, $\overrightarrow{PR}=\left(d-x,\dfrac{1}{d^2}-y\right)$.

Per ser la recta PQ tangent en el punt Q el seu pendent és $y'(c)=\dfrac{-2}{c^3}$

Aleshores, $\dfrac{\dfrac{1}{c^2}-y}{c-x}=\dfrac{-2}{c^3}$. $c-yc^3=-2c+2x$ (1)

Per ser la recta PR tangent en el punt R el seu pendent és $y'(d)=\dfrac{-2}{d^3}$

Aleshores, $\dfrac{\dfrac{1}{d^2}-y}{d-x}=\dfrac{-2}{d^3}$. Simplificant: $d-yd^3=-2d+2x$ (2)

Restant les expressions (1) i (2): $c-d-y(c^3-d^3)=-2(c-d)$

$c-d-y(c-d)(c^2+cd+d^2)=-2(c-d)$. Simplificant:

$y(c^2+cd+d^2)=3$ (3)

Multiplicant l'expressió (1) per d^3:

$cd^3-yc^3d^3=-2cd^3+2d^3x$ (4)

Multiplicant l'expressió (2) per c^3:

$c^3d-yc^3d^3=-2c^3d+2c^3x$ (5)

Restant les expressions (4) i (5) i simplificant:

$3cd(c+d)=2x(c^2+cd+d^2)$ (6)

Per ser les rectes PQ, PR ortogonals les seues pendent compleixen:

$\dfrac{-2}{c^3}=\dfrac{-1}{\dfrac{-2}{d^3}}$, simplificant, $c^3d^3=-4$ (7)

Elevem al quadrat l'expressió (6)

$9(cd)^2(c+d)^2=4x^2(c^2+cd+d^2)^2$ (8)

$(c+d)^2=(c^2+cd+d^2)+cd$

$(cd)^2(c+d)^2=(cd)^2(c^2+cd+d^2)+(cd)^3$ (9)

Substituint l'expressió (9) en l'expressió (8):

$9\left((cd)^2(c^2+cd+d^2)+(cd)^3\right)=4x^2(c^2+cd+d^2)^2$ (10)

Substituint les expressions (3) i (7) en l'expressió (10):

$-4+\dfrac{3\sqrt[3]{16}}{y}=4\dfrac{x^2}{y^2}$, Llevant denominadors: $4x^2+4y^2-3\sqrt[3]{16}y=0$.

Que és una circumferència.