

1.- En una successió de cercles de radi decreixent, cadascun d'ells és tangent exterior a la següent i als costats d'un angle recte. Determineu la raó entre l'àrea del primer cercle i la suma de les àrees dels infinits cercles.  
Oposicions Catalunya 1998.

Solució:

Considerem la successió dels radis:

$$r_0 = \overline{BC}$$

$$\overline{OC} = \sqrt{2}r_0$$

$$r_1 = \overline{AB}$$

$$\overline{OA} = \sqrt{2}r_1, \quad \overline{OB} = \sqrt{2}r_0 - r_0$$

$$r_1 = \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \sqrt{2}r_0 - \sqrt{2}r_1 - r_0$$

$$(1 + \sqrt{2})r_1 = (\sqrt{2} - 1)r_0$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{1 + \sqrt{2}} r_0 = (\sqrt{2} - 1)^2 r_0$$

Anàlogament,

$$r_2 = \frac{\sqrt{2} - 1}{1 + \sqrt{2}} r_1 = (\sqrt{2} - 1)^2 r_1 = (\sqrt{2} - 1)^4 r_0$$

Podem definir la successió de radis de forma recurrent:

$$r_n = (\sqrt{2} - 1)^{2n} r_0.$$

L'àrea del primer cercle és:

$$S_0 = \pi \cdot r_0^2$$

L'àrea dels altres cercles és:

$$S_i = \pi \cdot r_i^2 = \pi (\sqrt{2} - 1)^{4n} r_0^2, \quad i = 1, 2, \dots$$

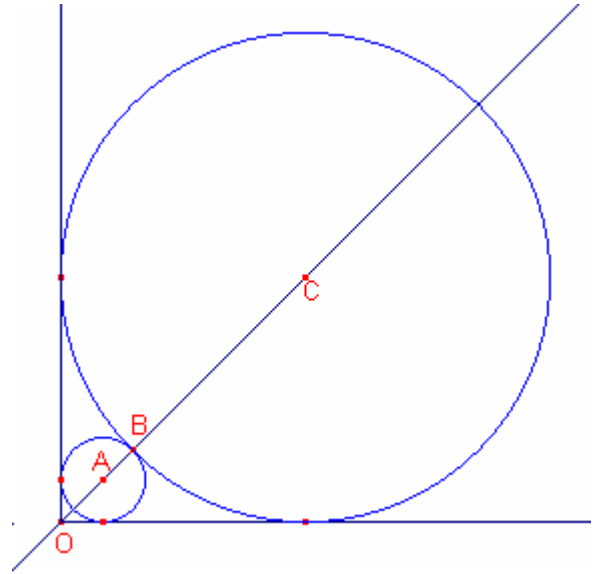
La suma és:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} S_i = \pi r_0^2 \sum_{i=1}^{\infty} \left( (\sqrt{2} - 1)^4 \right)^i = \pi r_0^2 \frac{(\sqrt{2} - 1)^4}{1 - (\sqrt{2} - 1)^4} = \pi r_0^2 \frac{3\sqrt{2} - 4}{8}.$$

(Hem aplicat la fórmula dels infinits termes d'una progressió geomètrica).

La proporció entre l'àrea del primer cercle i la suma dels infinits cercles restants és:

$$\frac{S_0}{S} = \frac{\pi r_0^2}{\pi r_0^2 \frac{3\sqrt{2} - 4}{8}} = 12\sqrt{2} + 16.$$



2.- Donada una circumferència de radi  $R > 0$  fixa, un punt  $O$  fix i una recta tangent a la circumferència en un punt diametralment oposat a  $O$ , es traça per  $O$  una recta secant variable que talla en  $B$  a la circumferència i en  $C$  a la recta tangent. Sobre la recta secant es considera el punt  $A$  tal que  $\overline{OA} = \overline{BC}$ . Determineu l'equació del lloc geomètric dels punts  $A$ .  
Oposicions València 2001.

Solució:

Siga la circumferència de centre  $D(R,0)$  i radi  $R$ , l'equació de la qual és:

$$(x - R)^2 + (y - 0)^2 = R^2. \quad x^2 + y^2 - 2Rx = 0.$$

Siga  $O(0,0)$  el punt diametralment oposat és  $O'(2R,0)$

La recta tangent a la circumferència en el punt  $O'$  té equació:

$$r \equiv x = 2R$$

Siga un punt variable  $C(2r,b)$  de la recta  $r$ .

Siga la recta  $s$  que passa pels punts  $O, C$  que té equació:

$$s \equiv y = \frac{b}{2R}x.$$

Determinem les coordenades del punt  $B$  intersecció de la recta  $s$  i la circumferència:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2Rx = 0 \\ y = \frac{b}{2R}x \end{cases} \quad \text{la no trivial del qual és} \quad \begin{cases} x = \frac{8R^3}{4R^2 + b^2} \\ y = \frac{4bR^2}{4R^2 + b^2} \end{cases}$$

Aleshores,  $B\left(\frac{8R^3}{4R^2 + b^2}, \frac{4bR^2}{4R^2 + b^2}\right)$ .

La primera coordenada del punt  $A(x_0, y_0)$  tal que  $\overline{OA} = \overline{BC}$  és:

$$x_0 = 2R - \frac{8R^3}{4R^2 + b^2} = \frac{2Rb^2}{4R^2 + b^2}.$$

Calculem la coordenada  $y_0$ , substituint en l'equació de la recta  $s$ :

$$y_0 = \frac{b^3}{4R^2 + b^2}$$

Les coordenades de  $A$  són  $A\left(\frac{2Rb^2}{4R^2 + b^2}, \frac{b^3}{4R^2 + b^2}\right)$ .

Siga  $x = \frac{2Rb^2}{4R^2 + b^2}$ , aleshores,  $4R^2 + b^2 = \frac{2Rb^2}{x}$  (1)

Siga  $y = \frac{b^3}{4R^2 + b^2}$  (2)

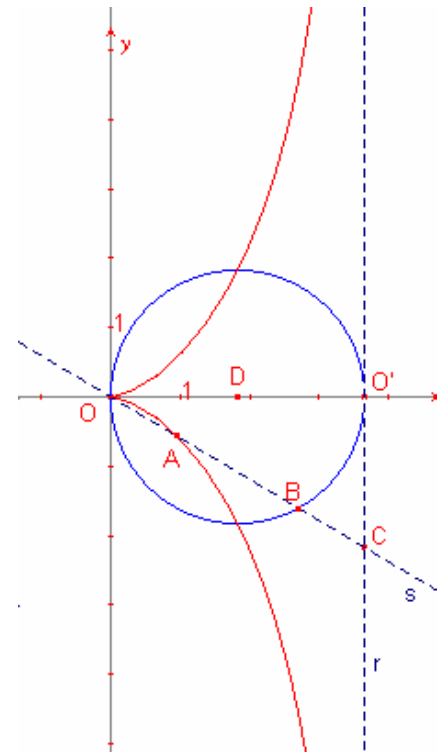
Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2)

$$y = \frac{b^3}{\frac{2Rb^2}{x}} = \frac{bx}{2R}. \quad \text{Elevant al quadrat: } y^2 = \frac{b^2x^2}{4R^2}$$
 (3)

Si  $x = \frac{2Rb^2}{4R^2 + b^2}$ , aleshores,  $b^2 = \frac{4R^2x}{2R - x}$  (4)

Substituint l'expressió (4) en l'expressió (3):

$$y^2 = \frac{x^3}{2R - x}, \quad 2R \cdot y^2 = x(x^2 + y^2) \quad \text{Equació de la Cissoide de Diocles.}$$



3.- Construïu raonadament un triangle rectangle d'hipotenusa donada a tal que la mitjana sobre la hipotenusa siga la mitjana geomètrica dels dos catets del triangle. Oposicions Catalunya 1997.

Solució:

Siga el triangle rectangle  $\triangle ABC$ ,  $A = 90^\circ$ .

Siga  $h = \overline{AH}$  altura sobre la hipotenusa.

Siga  $m = \overline{AO}$  la hipotenusa del triangle rectangle.

Per hipòtesi  $m = \sqrt{bc}$  (la mitjana és mitjana geomètrica dels dos catets).

La mitjana sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle mesura la meitat de la hipotenusa.

$$m = \frac{a}{2}.$$

$$\frac{a}{2} = \sqrt{bc}. \text{ Elevant al quadrat:}$$

$$\frac{a^2}{4} = bc \quad (1)$$

La superfície del triangle és:

$$S_{ABC} = \frac{ah}{2} = \frac{bc}{2}. \text{ Aleshores, } bc = ah \quad (2)$$

Substituint (2) en l'expressió (1):

$$\frac{a^2}{4} = ah. \text{ Simplificant, } h = \frac{a}{4}.$$

Mètode de construcció:

Dibuixar el segment  $a = \overline{BC}$ , de punt mig O.

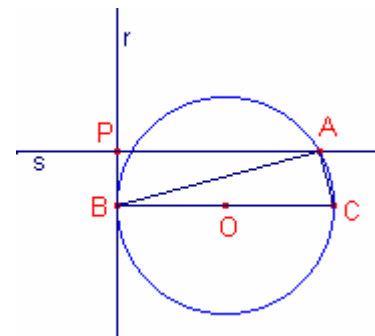
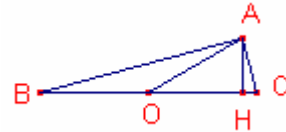
Dibuixar la circumferència de centre O i diàmetre  $a = \overline{BC}$ .

Dibuixar la recta r perpendicular a  $\overline{BC}$  que passa per B.

Dibuixar el punt P sobre la recta r tal que  $\overline{BP} = \frac{a}{4}$ .

Dibuixar la recta s paral·lela a  $\overline{BC}$  que passa per P, que talla la circumferència en el punt A.

Dibuixar el triangle rectangle  $\triangle ABC$ .



4.- Siga el triangle  $\triangle ABC$  de costats  $a, b, c$  tal que  $a + b + c = 60$ ,  $\frac{b+c}{4} = \frac{a+c}{5} = \frac{a+b}{6}$ .

- a) Proveu que els costats  $a, b, c$  del triangle estan en progressió aritmètica.  
 b) Calculeu  $\sin A : \sin B : \sin C$ .

Solució:

Considerem el sistema d'equacions lineals:

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 60 \\ \frac{b+c}{4} = \frac{a+c}{5} \\ \frac{b+c}{4} = \frac{a+b}{6} \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 60 \\ 4a - 5b - c = 0 \\ 4a - 2b - 6c = 0 \end{array} \right. , \text{ la solució del qual és: } \left\{ \begin{array}{l} a = 28 \\ b = 20 \\ c = 12 \end{array} \right.$$

Notem que  $a, b, c$  són els costats d'un triangle ja que  $20 + 12 > 28$ .

Aleshores els costats  $a, b, c$  estan en progressió aritmètica de diferència  $-8$ .

Aplicant el teorema dels sinus:

$$\frac{28}{\sin A} = \frac{20}{\sin B} = \frac{12}{\sin C} . \text{ Simplificant:}$$

$$\frac{7}{\sin A} = \frac{5}{\sin B} = \frac{3}{\sin C} , \text{ aleshores, } \sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3$$

5.- Siga el triangle  $\triangle ABC$ , proveu que si  $\cos A \cdot \sin \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$  el triangle és isòsceles.

Solució de Murray S. Klamkin (Cruce Mathematicorum).

$$\frac{C}{2} = \frac{180^\circ - (A+B)}{2} = 90^\circ - \frac{A+B}{2}.$$

$$\cos A \cdot \sin \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \left( 90^\circ - \frac{A+B}{2} \right).$$

$$\cos A \cdot \sin \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \left( \frac{A+B}{2} \right).$$

Transformant productes amb sumes:

$$\sin \left( A + \frac{A}{2} \right) + \sin \left( \frac{A}{2} - A \right) = \sin \left( \frac{B}{2} + \frac{A+B}{2} \right) + \sin \left( \frac{B}{2} - \frac{A+B}{2} \right)$$

$$\sin \left( \frac{3A}{2} \right) + \sin \left( -\frac{A}{2} \right) = \sin \left( B + \frac{A}{2} \right) + \sin \left( -\frac{A}{2} \right)$$

$$\sin \left( \frac{3A}{2} \right) = \sin \left( B + \frac{A}{2} \right)$$

Aleshores,  $\frac{3A}{2} = B + \frac{A}{2}$  o bé  $\frac{3A}{2} + B + \frac{A}{2} = 180^\circ$ .

En el primer cas  $A = B$ .

En el segon cas,  $2A + B = 180^\circ$ ,  $A + B + C = 180^\circ$ . Aleshores,  $A = C$ .

6.- Donada la circumferència de centre O i radi r i un punt exterior P, determineu la distància  $\overline{OP}$  en funció de r a fi que l'àrea generada pel segment de la tangent  $\overline{AP}$  (A és el punt de tangència) al girar al voltant de  $\overline{OP}$  siga el triple de l'àrea generada per l'arc AB al girar al voltant de  $\overline{OP}$  essent B el punt de tall de la circumferència amb  $\overline{OP}$ . Oposicions d'Astúries 2004.

Solució:

Sense perdre generalitat podem suposar que P està sobre l'eix positiu d'abscisses.

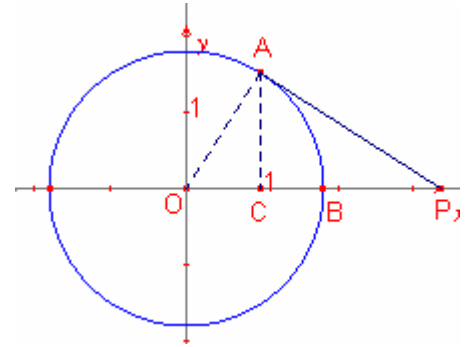
Siga  $r = \overline{OA} = \overline{OB}$ ,  $d = \overline{OP}$ ,  $a = \overline{AC}$ , altura del triangle  $\triangle OAP$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle OAP$ :

$$\overline{AP} = \sqrt{d^2 - r^2}$$

Els triangles rectangle  $\triangle OAP$ ,  $\triangle ACP$  són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{d}{r} = \frac{\sqrt{d^2 - r^2}}{a}, \quad a = \frac{r}{d} \sqrt{d^2 - r^2}.$$



L'àrea generada pel segment de la tangent  $\overline{AP}$  al girar sobre  $\overline{OP}$  és l'àrea lateral d'un con de generatriu  $\overline{AP}$  i radi  $a = \overline{AC}$ .

L'àrea de la superfície lateral d'un con és:

$S = \pi \cdot a \cdot \overline{AP}$  a el radi  $\overline{AP}$  la generatriu.

$$S = \pi \cdot \frac{r}{d} \cdot \sqrt{d^2 - r^2}.$$

L'àrea generada per l'arc AB al girar al voltant de  $\overline{OP}$  és el casquet esfèric de radi r i altura  $b = \overline{CB}$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle AOC$

$$\overline{OC} = \sqrt{r^2 - a^2} = \frac{r^2}{d}. \quad \overline{CB} = r - \overline{OC} = r - \frac{r^2}{d}.$$

L'àrea del casquet esfèric és:

$S = 2\pi \cdot r \cdot \overline{CB}$  r el radi  $\overline{CB}$  l'altura.

$$S = 2\pi r \left( \frac{rd - r^2}{d} \right).$$

L'àrea del con és el triple de l'àrea del casquet:

$$\pi \frac{r \sqrt{d^2 - r^2}}{d} = 3 \cdot 2\pi r \left( \frac{rd - r^2}{d} \right). \text{ Simplificant:}$$

$(1 - 36r^2)d^2 + 72r^3 - 36r^4 - r^2 = 0$ . Les solucions de l'equació són:

$$d = r, \quad d = \frac{r(36r^2 + 1)}{36r^2 - 1}. \text{ L'única solució vàlida és } d = \frac{r(36r^2 + 1)}{36r^2 - 1}.$$

El problema no té solució si  $r \leq \frac{1}{6}$ .

7.- Donada la circumferència  $x^2 + y^2 - 6x = 0$  i la recta  $r \equiv y - 3 = 0$  es traça per l'origen de coordenades O una recta s que talla la circumferència en un punt A distint de O i a la recta r en el punt B. La paral·lela per A a l'eix OX i la paral·lela per B a l'eix OY es tallen en un punt P. Es demana:

- Determineu el lloc geomètric del punt P quan la recta s varia passant per O
- Estudiar el lloc geomètric i representeu-lo determinant els seus elements més notables.

Oposicions Cantàbria 2004.

Solució:

La  $x^2 + y^2 - 6x = 0$  és la circumferència  $(x-3)^2 + y^2 = 3^2$  de centre (3,0) i radi 3.

Siga la recta  $s \equiv y = mx$ .

El punt A és la intersecció de la recta s i la circumferència les seues coordenades són:

$$A\left(\frac{6}{1+m^2}, \frac{6m}{1+m^2}\right)$$

L'equació de la recta u paral·lela a l'eix OX que passa per A té equació:

$$u \equiv y = \frac{6m}{1+m^2}$$

El punt B és la intersecció de la recta r i la circumferència les seues coordenades són:

$$B\left(\frac{3}{m}, 3\right)$$

L'equació de la recta v paral·lela a l'eix OY que passa per B té equació:

$$v \equiv x = \frac{3}{m}$$

El punt P és la intersecció de les rectes u, v, les seues coordenades són:

$$P\left(\frac{3}{m}, \frac{6m}{1+m^2}\right). \text{ Siga } x = \frac{3}{m}, y = \frac{6m}{1+m^2}.$$

$$m = \frac{3}{x}, \text{ aleshores, } y = \frac{6 \cdot \frac{3}{x}}{1 + \frac{9}{x^2}} = \frac{18x}{9+x^2}.$$

L'equació del lloc geomètric és  $y = \frac{18x}{9+x^2}$ .

Estudiem aquesta funció:

El domini de la funció és  $\mathbb{R}$ , és contínua i derivable en  $\mathbb{R}$ .

(0,0) és el punt de tall amb els eixos.

És una funció simètrica respecte de l'origen de coordenades.

$$y' = \frac{18(9-x^2)}{(9+x^2)^2}$$

Estudiem el signe de la primera derivada:

La funció és decreixent en  $]-\infty, -3[ \cup ]3, +\infty[$ . La funció és creixent en  $] -3, 3[$

$x = -3$  és un mínim de la funció  $(-3, -3)$ ,  $x = 3$  és un màxim de la funció  $(3, 3)$ ,

$$y'' = \frac{36x(x^2 - 27)}{(9 + x^2)^3}$$

Estudiem el signe de la segona derivada:

La funció és convexa en  $]-\infty, -3\sqrt{3}[ \cup ]3\sqrt{3}, +\infty[$

La funció és còncava en  $]-3\sqrt{3}, 0[ \cup ]0, 3\sqrt{3}[$

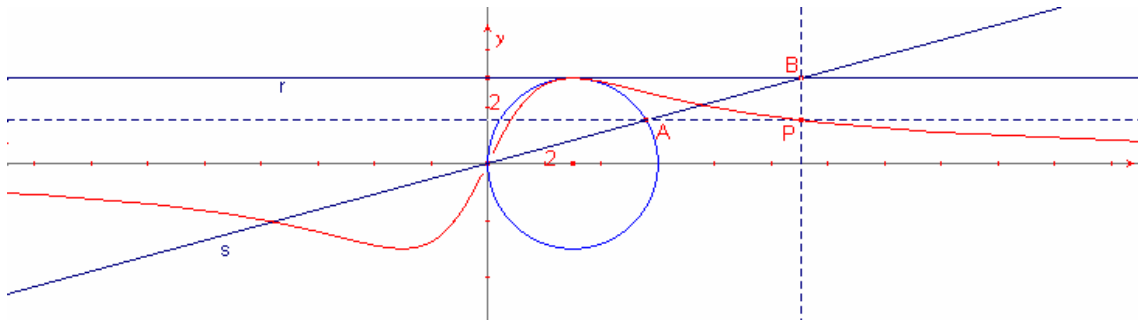
$x = -3\sqrt{3}, 0, 3\sqrt{3}$  són punts d'inflexió.  $\left(-3\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right), (0,0), \left(3\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{18x}{9+x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{18x}{9+x^2} = 0$$

La funció té una asímptota horitzontal d'equació  $y = 0$  quan  $x \rightarrow -\infty, x \rightarrow +\infty$

Quan  $x \rightarrow -\infty$  la corba va per sota l'asímtota i quan  $x \rightarrow +\infty$  la corba va per dalt de l'asímtota.

La gràfica és:



8.- Un segment  $\overline{AB}$  de longitud 4 es mou tenint el seu extrem A sobre la recta  $r_1 \equiv y - 3x + 1 = 0$  i el seu extrem B sobre la recta  $r_2 \equiv 3y + x - 7 = 0$ . Determineu el lloc geomètric del punt mig del segment  $\overline{AB}$ .  
Oposicions Andalusia 2004.

Solució:

Notem que les dues rectes són perpendiculars ja que el pendent de  $r_1$  és

$$m = 3 \text{ i el pendent de } r_2 \text{ és } m' = \frac{-1}{3}$$

El producte dels pendents és

$$m \cdot m' = 3 \cdot \left(\frac{-1}{3}\right) = -1.$$

El punt d'intersecció de les rectes és  $P(1,2)$

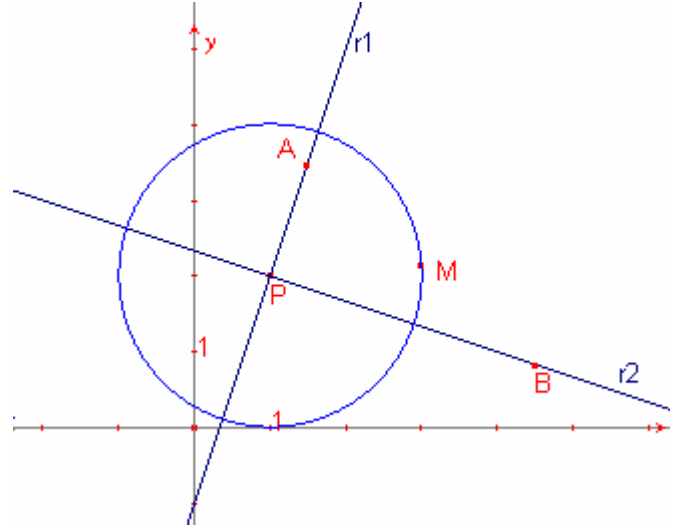
Els punts P, A, B formen un triangle rectangle d'hipotenusa  $\overline{AB} = 4$ .

Determinem el lloc geomètric del punt mig de la hipotenusa  $\overline{AB}$  d'un triangle de hipotenusa constant.

La mitjana d'un triangle rectangle mesura la meitat que la hipotenusa. Aleshores la distància del punt mig M del segment  $\overline{AB}$  al punt P és constant a  $\frac{\overline{AB}}{2} = 2$ .

Aleshores el lloc geomètric és la circumferència de centre P i radi 2

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2^2.$$



9.- Donat el rectangle ABCD amb  $a = \overline{AB}$  (base) i  $b = \overline{BC}$  altura i  $a > b$  des de la base  $\overline{AB}$  es construeix internament el triangle equilàter  $\triangle ABX$  i des de l'altura  $\overline{BC}$  es

construeix exteriorment un triangle equilàter  $\triangle BCY$ . Les rectes AX i BY es tallen en el punt Z. Es demana:

- Determina la relació entre la base i l'altura del rectangle a fi que els punts X, C i Y estiguen alineats.
- Caracteritza i calcula en aquest cas tots els elements significatius: costats, angles, mitjanes, bisectrius interiors i exteriors, radi inscrit i radi circumscrit del triangle  $\triangle XYZ$ .

Solució:

a)

A fi que els punts X, C i Y estiguen alineats l'angle  $\angle XCY$  ha de ser pla.

$\angle BCY = 60^\circ$  per ser el triangle  $\triangle BCY$  equilàter.

$\angle BCD = 90^\circ$  per ser ABCD un rectangle.

Aleshores per estar alineats l'angle

$\angle DCX = 30^\circ$

En aquesta cas  $\angle CXB = 30^\circ$ .

Per tant el triangle  $\triangle XBC$  és isòsceles

$\overline{CX} = \overline{CY} = b$

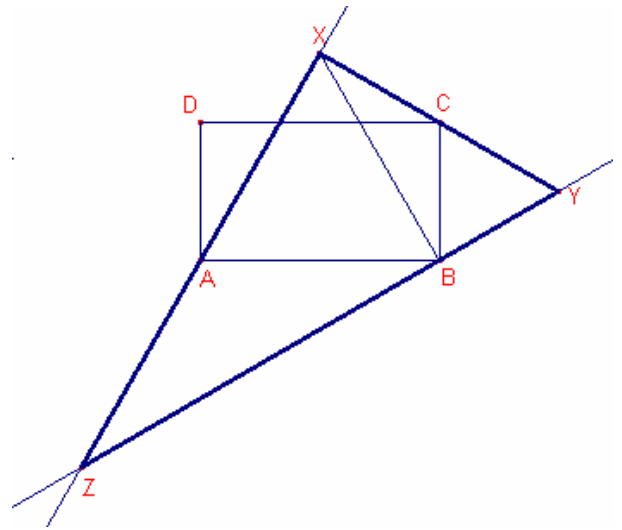
i el triangle  $\triangle XBY$  és rectangle.  $\overline{BX} = a$ ,  $\overline{BY} = b$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle

rectangle  $\triangle XBY$ :

$$(2b)^2 = a^2 - b^2$$

Aleshores,  $a = \sqrt{3}b$ .



b)

$\angle ZXY = \angle AXB + \angle BXY = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ . Aleshores, el triangle és rectangle.

$\angle XYZ = 60^\circ$ ,  $\angle XZY = 30^\circ$ .

$\overline{XY} = 2b$ ,  $\overline{YZ} = 2 \cdot \overline{XY} = 4b$ .

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle  $\triangle XYZ$ :

$$\overline{XZ} = 2\sqrt{3}b.$$

Calculem les mitjanes:

Siguen  $\overline{XL}$ ,  $\overline{YM}$ ,  $\overline{ZN}$  les mitjanes del triangle  $\triangle XYZ$ .

La mitjana sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle mesura la meitat que la hipotenusa, aleshores,

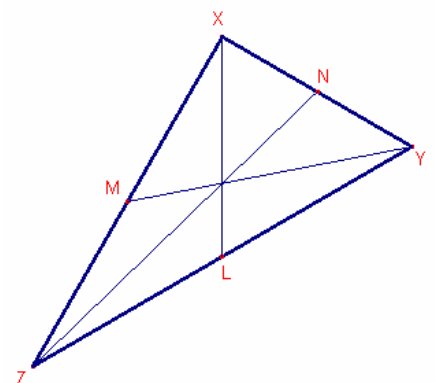
$$\overline{XL} = \frac{\overline{YZ}}{2} = 2b.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle MXY$ :

$$\overline{YM} = \sqrt{(\sqrt{3}b)^2 + (2b)^2} = \sqrt{7}b.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle  $\triangle ZZN$ :

$$\overline{ZN} = \sqrt{(2\sqrt{3}b)^2 + b^2} = \sqrt{13}b.$$



Calculem les bisectrius interiors:

Siguen  $\overline{XP}$ ,  $\overline{YQ}$ ,  $\overline{ZR}$  les bisectrius interiors al triangle  $\triangle XYZ$ .

Aplicant el teorema dels sinus al triangle  $\triangle XPY$ :

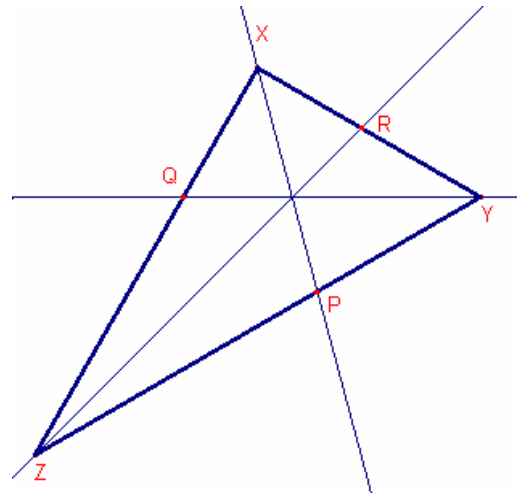
$$\frac{\overline{XP}}{\sin 60^\circ} = \frac{2b}{\sin 105^\circ}, \quad \overline{XP} = (3\sqrt{2} - \sqrt{6})b$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle  $\triangle QXY$ ,

$$\overline{YQ} = \frac{2b}{\cos 30^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3}b.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle  $\triangle RXZ$ ,

$$\overline{ZR} = \frac{2\sqrt{3}b}{\cos 15^\circ}. \quad \overline{ZR} = (6\sqrt{2} - 2\sqrt{6})b$$



Calculem les bisectrius exteriors:

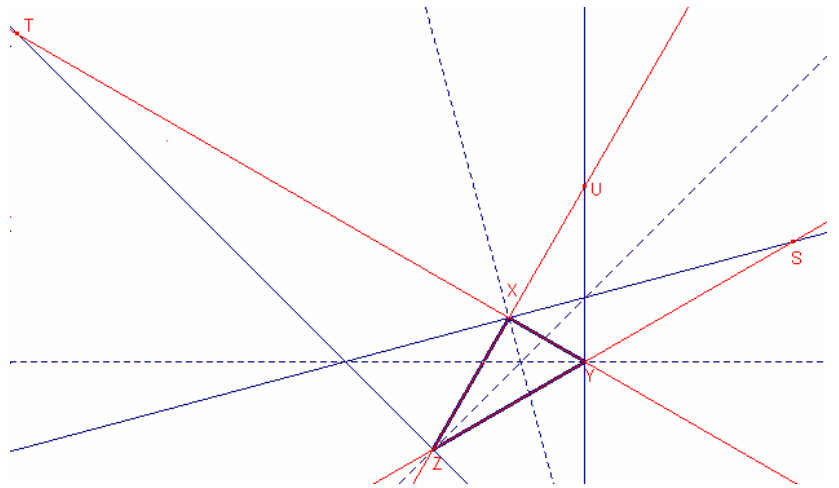
Siguen  $\overline{XS}$ ,  $\overline{YU}$ ,  $\overline{ZT}$  les bisectrius exteriors al triangle  $\triangle XYZ$ .

$$\angle SXY = 45^\circ, \quad \angle XYS = 120^\circ.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle  $\triangle XSY$ :

$$\frac{\overline{XS}}{\sin 120^\circ} = \frac{2b}{\sin 15^\circ},$$

$$\overline{XS} = (3\sqrt{2} + \sqrt{6})b$$



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle  $\triangle UXY$ :

$$\overline{YU} = \frac{2b}{\cos 60^\circ} = 4b.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle  $\triangle TXZ$ :

$$\overline{ZT} = \frac{2\sqrt{3}b}{\cos 75^\circ}. \quad \overline{ZT} = (6\sqrt{2} + 2\sqrt{6})b$$

Calculem el radi de la circumferència inscrita i la circumscrita.

En un triangle rectangle el radi R de la circumferència circumscrita mesura la meitat de la hipotenusa.

$$R = \frac{\overline{YZ}}{2} = \frac{4b}{2}.$$

En un triangle rectangle el radi r de la circumferència inscrita mesura el semiperímetre menys la hipotenusa.

$$r = \frac{\overline{XY} + \overline{XZ} + \overline{YZ}}{2} - \overline{YZ} = \frac{2b + 2\sqrt{3}b + 4b}{2} - 4b = (-1 + \sqrt{3})b.$$

10.- Es considera una el·lipse i siga A un dels seus punts. Per cada punt X de l'el·lipse siga X' el punt mig del segment  $\overline{AX}$ . Determineu el lloc geomètric descrit pel punt X' quan X recorre l'el·lipse.

Determineu el lloc geomètric en el cas de l'el·lipse  $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y - 140 = 0$  i A(4,6).

Oposicions Madrid 2002.

Solució:

Sense llevar generalitat posem suposar que l'el·lipse té equació reduïda:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Siga A( $x_0, y_0$ ), X(m,n) dos punts de l'el·lipse:

El punt mig X' del segment  $\overline{AX}$  té coordenades,  $X'\left(\frac{x_0+m}{2}, \frac{y_0+n}{2}\right)$ .

Siga  $x = \frac{x_0+m}{2}$ ,  $y = \frac{y_0+n}{2}$ .  $X'(x,y)$ .

Aleshores,  $m = 2x - x_0$ ,  $n = 2y - y_0$ .

Per ser X(m,n) un punt de l'el·lipse satisfà l'equació de l'el·lipse, aleshores:

$$\frac{(2x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(2y - y_0)^2}{b^2} = 1. \text{ Dividint denominadors i denominadors per 4:}$$

$$\frac{\left(x - \frac{x_0}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{y_0}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = 1.$$

Aleshores el lloc descrit pel punt X' quan X recorre l'el·lipse és una el·lipse de centre

$M\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$  i semieixos la meitat dels semieixos de

l'el·lipse inicial.

Determinem el lloc geomètric en el cas de l'el·lipse

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y - 140 = 0 \text{ i A(4,6)}$$

Determinem la seua equació reduïda és:

$$4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 140 + 4 + 36$$

$$\frac{(x-1)^2}{\left(\frac{\sqrt{180}}{2}\right)^2} + \frac{(y-2)^2}{\left(\frac{\sqrt{180}}{3}\right)^2} = 1 \text{ Una el·lipse de centre}$$

(1,2) i semieixos  $a = \sqrt{45}$ ,  $b = \sqrt{20}$ .

El lloc geomètric descrit pel punt X' punt mig de  $\overline{AX}$  quan X recorre l'el·lipse és l'el·lipse:

$$\frac{\left(x - \frac{1+4}{2}\right)^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{2+6}{2}\right)^2}{\left(\frac{10}{3 \cdot 2}\right)^2} = 1.$$

