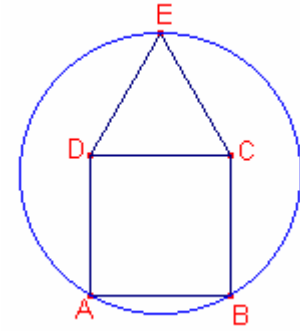


1.- Un triangle equilàter està dibuixat al defora del costat superior del quadrat ABCD de costat 1 com mostra la figura. Si una circumferència passa pels punts A, B i E. Quin és el radi del cercle.



Solució:

El triangle $\triangle AED$ és isòsceles, $\overline{AD} = \overline{DE} = 1$.

$$\angle ADE = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ.$$

$$\angle DEA = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

$$\angle CEB = 15^\circ.$$

$$\angle AEB = 60^\circ - 2 \cdot \angle DEA = 60^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ.$$

L'angle $\angle AEB$ és un angle inscrit en la circumferència que mesura 30° aleshores l'arc és de 60° .

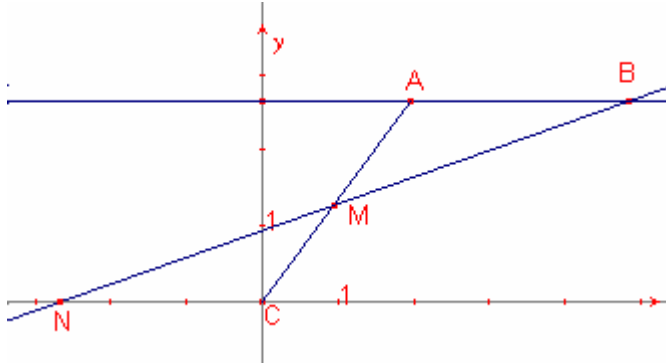
Aleshores l'arc mesura la sisena part de la circumferència.

Aleshores la corda \overline{AB} mesura el mateix que el radi.

Per tant el radi de la circumferència és igual $\overline{AB} = 1$.

2.- Donades dues rectes paral·leles a , b , i dos punts fixos A i B sobre la recta a i altre punt fix C sobre la recta b , es demana, determinar sobre el segment \overline{AC} un punt M , tal que la suma de les àrees dels triangles MAB i MNC siga mínima. N és el punt d'intersecció de la recta BM amb la recta b .

Solució:



Considerem la recta $b \equiv y = 0$ i la recta $a \equiv y = m$

Considererem els punts $A(a,m)$, $B(b,m)$, $C(0,0)$

Siga un punt M del segment \overline{AC} que tindrà coordenades $M\left(\frac{ah}{m}, h\right)$.

Determinem les coordenades del punt $N(d,0)$ en funció de a , b , m , h

Els triangles MAB i MNC són semblants. Aleshores:

$$\frac{h}{-d} = \frac{m-h}{b-a}$$

Aleshores, $d = \frac{a-b}{m-h}h$.

La suma de les àrees dels triangles MAB i MNC és:

$$S = \frac{-dh}{2} + \frac{(b-a)(m-h)}{2}, \quad 0 \leq h \leq m.$$

$$S(h) = \frac{1}{2}(b-a) \left(\frac{h^2}{m-h} + (m-h) \right) = \frac{1}{2}(b-a) \frac{2h^2 - 2mh + m^2}{m-h}.$$

$$S'(h) = \frac{1}{2}(b-a) \frac{-2h^2 + 4mh - m^2}{(h-m)^2}$$

$$S'(h) = 0, \quad -h^2 + 4mh - m^2 = 0, \quad h = \frac{(2-\sqrt{2})m}{2}$$

$$S''\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}m\right) > 0, \text{ aleshores, } h = \frac{(2-\sqrt{2})m}{2} \text{ és un mínim.}$$

Notem que el valor mínim de h compleix $\frac{h}{m} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

3.- En un cub d'aresta a es considera una diagonal D i una diagonal d d'una de les seues cares de tal forma que les rectes D i d es creuen. Determineu la distància entre d i D .

Solució:

Considerem els vèrtex del cub d'aresta a en les següents coordenades cartesianes:

$A(0,0,0)$, $B(a,a,a)$, $C(0,a,0)$, $E(0,0,a)$.

Siga la diagonal $D = \overline{AB}$ i la diagonal d'una cara $d = \overline{CE}$, tal que D i d es creuen.

El vector director de la recta D és, $\vec{AB} = (a, a, a)$.

El vector director de la recta d és, $\vec{CE} = (0, -a, a)$.

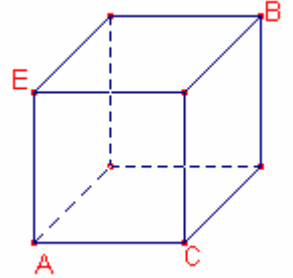
El plànol que conté la recta D i és paral·lel a la recta d té per equació:

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Pi \equiv 2x + y - z = 0.$$

La distància entre les rectes D i d és la distància d'un punt de la recta d al plànol Π .

$$d(C, \Pi) = \frac{|0 + a + 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$



4.- Donada la paràbola $y^2 = 2x$, la tangent en un punt P talla l'eix d'ordenades en A i la normal en el punt P talla l'eix d'ordenades en el punt B. Determineu el lloc geomètric que descriu el baricentre del triangle $\triangle PAB$ al variar P sobre la paràbola.

Solució:

Siga P un punt de la paràbola, tindrà coordenades $P(a, \pm\sqrt{2a})$, $a \geq 0$.

Suposem P en el primer quadrant, $P(a, \sqrt{2a})$.

Determinem la recta tangent i normal a la paràbola en el punt P:

$$\text{Siga } f(x) = \sqrt{2x}, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}.$$

La recta tangent en el punt P té equació:

$$r_T \equiv y - \sqrt{2a} = \frac{1}{\sqrt{2a}}(x - a).$$

$$r_N \equiv y - \sqrt{2a} = -\sqrt{2a}(x - a).$$

Calculem les coordenades de A i B:

Si $x = 0$ en la recta tangent, aleshores, $y = \frac{\sqrt{2a}}{2}$. Per tant,

$$A\left(0, \frac{\sqrt{2a}}{2}\right).$$

Si $x = 0$ en la recta normal, aleshores, $y = (1+a)\sqrt{2a}$. Per tant, $B(0, (1+a)\sqrt{2a})$.

Siga G el baricentre del triangle $\triangle PAB$ les seues coordenades són:

$$G\left(\frac{a+0+0}{3}, \frac{\sqrt{2a} + \frac{\sqrt{2a}}{2} + (1+a)\sqrt{2a}}{3}\right)$$

$$\text{Per tant, } G\left(\frac{a}{3}, \frac{(5+2a)\sqrt{2a}}{6}\right)$$

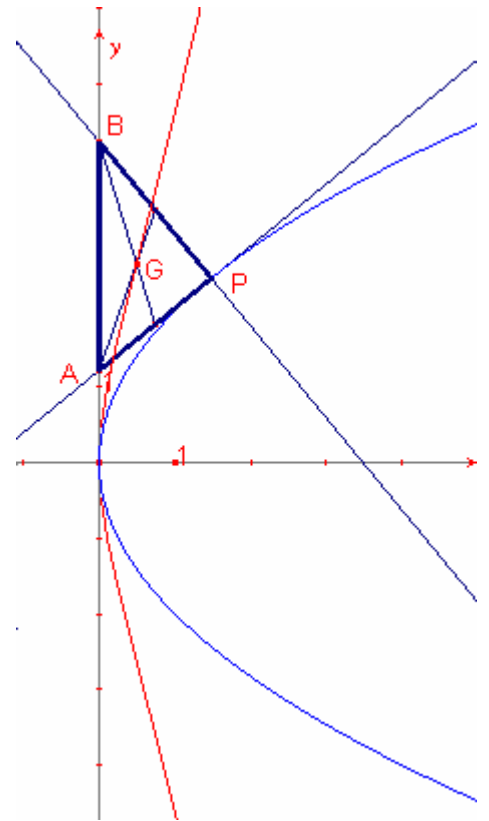
Determinen l'equació del lloc geomètric:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{3} \\ y = \frac{(5+2a)\sqrt{2a}}{6} \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 3x \\ y = \frac{(5+6x)\sqrt{6x}}{6} \end{cases}.$$

Elevant al quadrat la segona equació:

$$36y^2 = 6x(5+6x)^2.$$

No és una cònica.



5.- Siguen les rectes:

$$r_1 \equiv x + y - 2 = 0, \quad r_2 \equiv x + 2y - 3 = 0, \quad r_3 \equiv 3x + y - 4 = 0.$$

Determineu els vèrtexs A, B, C d'un triangle sabent que el radi de la circumferència circumscriu és 2 i que r_1 és mediatriu de \overline{AB} , r_2 mediatriu de \overline{BC} i r_3 mediatriu de \overline{AC} .

Problema Oposicions Andalusia 2002.

Solució:

Siguen $A(a,b)$, $B(c,d)$, $C(e,f)$.

La intersecció de les tres rectes és el circumcentre $O(1,1)$.

La circumferència circumscriu al triangle té equació:

$$(x - a)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$

El punt mig $L\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$ del segment \overline{AB} pertany a

la recta r_1 , aleshores:

$$a + b + c + d = 4 \quad (1)$$

El punt mig $M\left(\frac{c+e}{2}, \frac{d+f}{2}\right)$ del segment \overline{BC} pertany a

la recta r_2 , aleshores:

$$c + 2d + e + 2f = 6 \quad (2)$$

El punt mig $N\left(\frac{a+e}{2}, \frac{b+f}{2}\right)$ del segment \overline{AC} pertany a la recta r_3 , aleshores:

$$3a + b + 3e + f = 8 \quad (3)$$

El vector $\overrightarrow{AB} = (c - a, d - b)$ és ortogonal al vector director de la recta r_1 $(-1,1)$, aleshores:

$$a - c + d - b = 0 \quad (4)$$

El vector $\overrightarrow{BC} = (e - c, f - d)$ és ortogonal al vector director de la recta r_2 $(-2,1)$, aleshores:

$$-2e + 2c + f - d = 0 \quad (5)$$

El punt A pertany a la circumferència de centre $O(1,1)$ i radi 2, aleshores:

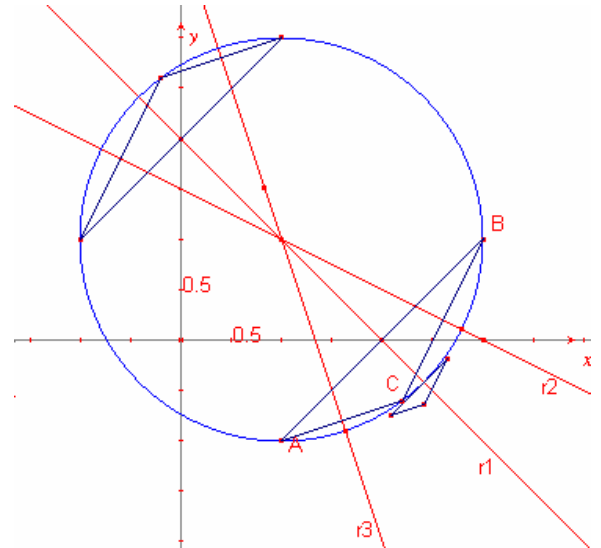
$$(a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 4 \quad (6)$$

Considerem el sistema format per les equacions (1), (2), (3), (4), (5), (6):

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b + c + d = 4 \\ c + 2d + e + f = 6 \\ 3a + b + 3e + f = 8 \\ a - b - c + d = 0 \\ 2c - d - 2e + f = 0 \\ (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 4 \end{array} \right. \quad \text{les 2 solucions del qual són: } \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 3 \\ d = 1 \\ e = \frac{11}{5} \\ f = \frac{-3}{5} \end{array} \right. \quad \text{i} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -1 \\ d = 1 \\ e = \frac{-1}{5} \\ f = \frac{13}{5} \end{array} \right.$$

Les solucions són els triangles de vèrtexs:

$$A(1,-1), B(3,1), C\left(\frac{11}{5}, \frac{-3}{5}\right) \quad \text{i} \quad A(1,3), B(-1,1), C\left(\frac{-1}{5}, \frac{13}{5}\right).$$



6.- Siga \overline{AD} l'altura al costat \overline{BC} del triangle $\triangle ABC$. Siga M i N els punts mig dels costats \overline{AB} i \overline{AC} , respectivament. Siga E el segon punt d'intersecció de les circumferències circumscrites als triangles $\triangle BDM$ i $\triangle CDN$. Proveu que la recta DE passa pel punt mig del segment \overline{MN} .

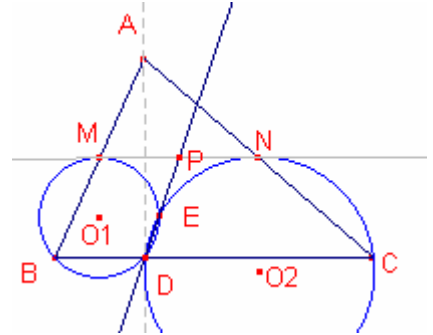
Solució:

Considerem els vèrtex del triangle $\triangle ABC$ amb les següents coordenades cartesianes: $B(0,0), A(b,c), C(a,0)$.

Les coordenades del peu de l'altura \overline{AD} són $D(b,0)$.

Les coordenades del punt mig M del segment \overline{AB} i N punt mig del segment són:

$$M\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right), N\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right).$$



Les coordenades del punt mig P del segment \overline{MN} són $P\left(\frac{a+2b}{4}, \frac{c}{2}\right)$

Determinem el centre O_1 de la circumferència circumscrita al triangle $\triangle BDM$:

La recta mediatriu del segment \overline{BD} té equació $m_{BD} \equiv x = \frac{b}{2}$.

La recta mediatriu del segment \overline{BM} té equació $m_{BM} \equiv y - \frac{c}{4} = \frac{-b}{c} \left(x - \frac{b}{4}\right)$.

La intersecció de les rectes m_{BD} , m_{BM} és el centre de la circumferència circumscrita al triangle $\triangle BDM$. Les seues coordenades són: $O_1\left(\frac{b}{2}, \frac{c^2 - b^2}{4c}\right)$.

Determinem el centre O_2 de la circumferència circumscrita al triangle $\triangle CDN$:

La recta mediatriu del segment \overline{CD} té equació $m_{CD} \equiv x = \frac{a+b}{2}$.

La recta mediatriu del segment \overline{CN} té equació $m_{CN} \equiv y - \frac{c}{4} = \frac{a-b}{c} \left(x - \frac{3a+b}{4}\right)$.

La intersecció de les rectes m_{CD} , m_{CN} és el centre de la circumferència circumscrita al triangle $\triangle CDN$. Les seues coordenades són: $O_2\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c^2 - (a-b)^2}{4c}\right)$.

Siga E el punt d'intersecció d'ambdues circumferències (distint de D)

La recta que passa pels punts D, E és perpendicular al segment $\overline{O_1O_2}$.

La recta que passa per D, E és la recta que passa per D i té per vector director

$$\overrightarrow{O_1O_2} = \left(\frac{a}{2}, \frac{-a^2 + 2ab}{4c}\right). \text{ Simplificant el vector director és } v = (2c, -a + 2b).$$

L'equació de la recta que passa pels punts D, E té equació: $r \equiv y = \frac{-2c}{-a + 2b} (x - b)$

El punt $P\left(\frac{a+2b}{4}, \frac{c}{2}\right)$ és de la recta r ja que satisfà la seua equació:

$$\frac{c}{2} = \frac{-2c}{-a + 2b} \left(\frac{a+2b}{4} - b\right).$$

7.- Siguen A i B dos punts fixos situats sobre el semieix OY positiu. Determineu sobre l'eix d'abscisses un punt P de manera que l'angle $\angle APB$ siga màxim.
Oposicions Canàries 1987.

Solució 1:

Siga $A(0,a)$, $B(0,b)$, $a,b > 0$, $O(0,0)$.

Siga $\alpha = \angle APB$. Siga $\beta = \angle BPO$. Siga $\gamma = \angle APO$.

$\alpha = \gamma - \beta$.

Siga $P(c,0)$.

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\gamma - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{a}{c} - \frac{b}{c}}{1 + \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}} = \frac{(a-b)c}{c^2 + ab}.$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{(a-b)c}{c^2 + ab}\right)$$

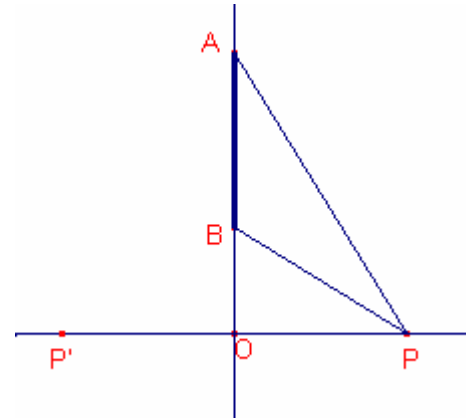
Considerem la funció, $f(c) = \arctg\left(\frac{(a-b)c}{c^2 + ab}\right)$. Determinen el màxim de la funció.

$$f'(c) = \frac{1}{1 + \left(\frac{(a-b)c}{c^2 + ab}\right)^2} \cdot \frac{(a-b)(c^2 + ab) - (a-b)c^2}{(c^2 + ab)^2} = \frac{(a-b)(ab - c^2)}{(c^2 + ab)^2 + (a-b)^2 c^2}.$$

$f'(c) = 0$, si $c^2 = ab$. Aleshores, $c = \pm\sqrt{ab}$.

$f''(\pm\sqrt{ab}) < 0$. Per tant, $c = \sqrt{ab}$, $c = -\sqrt{ab}$ són màxims.

Els punts que cerquem són $P(\sqrt{ab}, 0)$, $P'(-\sqrt{ab}, 0)$.



Solució2: Amb l'ajut d'Óscar González, professor de dibuix.

El punt P és el punt de tangència de la circumferència que passa pels punts A, B i és tangent a l'eix OX.

Notem que qualsevol altre punt (exterior a la circumferència) l'angle és menor.

El centre de la circumferència està en la mediatriu al segment \overline{AB} , aleshores és de la

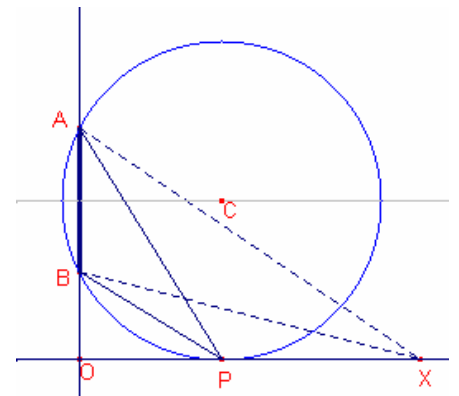
forma: $C\left(c, \frac{a+b}{2}\right)$.

La distància de C al punt A és igual a la distància de C a l'eix OX.

$$d(C, A) = \sqrt{c^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2}, \quad d(C, OX) = \frac{a+b}{2}. \text{ Igualant:}$$

$$\sqrt{c^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{a+b}{2}, \text{ elevant al quadrat i simplificant:}$$

$c^2 = ab$, aleshores, $c = \pm\sqrt{ab}$. Els punts que cerquem són $P(\sqrt{ab}, 0)$, $P'(-\sqrt{ab}, 0)$.



8.- En un triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$, de catet $c = \overline{AB}$ constant, siga l'altre catet $b = \overline{AC}$ variable. En la circumferència circumscrita al triangle, siga S l'àrea del menor dels dos segments circulars determinats pel catet \overline{AC} .

Determineu $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{S}{b^3}$.

Oposicions Andalusia 1996.

Solució:

El centre O de la circumferència circumscrita d'un triangle rectangle és el punt mig de la hipotenusa. El radi és la meitat de la hipotenusa, $R = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2}$.

Siga $\alpha = \angle ABC$. $\alpha = \arctg \frac{b}{c}$.

L'angle $\angle AOB = 2\alpha$, per ser angle central i $\alpha = \angle ABC$.

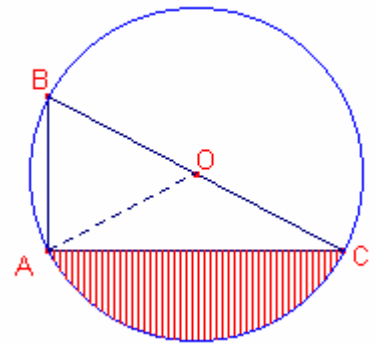
L'àrea del sector de centre O i arc AC és:

$$S_{\text{sector}} = R^2 \alpha.$$

L'àrea del triangle $\triangle ACO$ és la meitat de l'àrea del triangle $\triangle ABC$, ja que O és el punt mig de la hipotenusa.

L'àrea del triangle $\triangle ACO$ és:

$$S_{\triangle ACO} = \frac{bc}{4}.$$



L'àrea del segment circular és:

$$S = S_{\text{sector}} - S_{\triangle ACO} = \frac{b^2 + c^2}{4} \alpha - \frac{bc}{4} = \frac{b^2 + c^2}{4} \arctg \frac{b}{c} - \frac{bc}{4}.$$

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{S}{b^3} = \frac{(b^2 + c^2) \arctg \frac{b}{c} - bc}{4b^3} \stackrel{\frac{0}{0} \text{Hòpital}}{=} \lim_{b \rightarrow 0} \frac{2b \cdot \arctg \frac{b}{c}}{12b^2} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\arctg \frac{b}{c}}{6b} \stackrel{\frac{0}{0} \text{Hòpital}}{=} \lim_{b \rightarrow 0} \frac{c}{b^2 + c^2} = \frac{1}{6c}.$$

9.- Demostreu que només existeix un triangle els costats del qual són nombres naturals consecutius i tal que un angle és el doble d'altre.
Oposicions Lleó 2000.

Solució:

Suposem que $\hat{C} = 2 \cdot \hat{B}$, aleshores, $c > b$

Vegem la relació entre els costats del triangle que compleixen aquesta relació:

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin 2B} = \frac{c}{2 \cdot \sin B \cdot \cos B}$$

$$\text{Aleshores, } \cos B = \frac{c}{2b} \quad (1)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \quad (2)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2)

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \frac{c}{2b}$$

$$b^2 - a^2 = c^2 - \frac{a}{b}c^2, \quad b^2 - a^2 = c^2 \left(1 - \frac{a}{b}\right)$$

$$\text{Aleshores, } c^2 = (b^2 - a^2) \left(\frac{b}{b-a}\right).$$

$$c^2 = (a+b)b \quad (3)$$

Els tres costats són nombres naturals consecutius, aleshores pot passar els següents casos:

$$c > b > a, \quad a = b-1, \quad c = b+1$$

Substituint el l'expressió (3):

$$(b+1)^2 = (2b-1)b$$

$$b^2 - 3b - 1 = 0, \quad b = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \text{ que no és solució natural.}$$

$$c > a > b, \quad a = b+1, \quad c = b+2$$

Substituint el l'expressió (3):

$$(b+2)^2 = (2b+1)b$$

$$b^2 - 3b - 4 = 0, \quad b = \frac{3 + \sqrt{25}}{2} = 4, \text{ aleshores, } a = 5, \quad c = 6$$

Aquests tres valors compleixen les desigualtats triangulars, aleshores formen un triangle $6 < 4 + 5$.

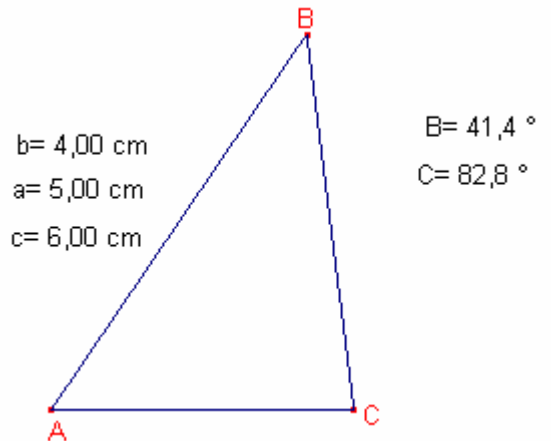
$$a > c > b, \quad a = b+2, \quad c = b+1$$

Substituint el l'expressió (3):

$$(b+1)^2 = (2b+2)b$$

$$b^2 - 1 = 0, \quad b = 1, \text{ aleshores, } a = 3, \quad c = 2$$

Aquests tres valors no compleixen una desigualtat triangular, aleshores no formen un triangle $3 = 1 + 2$.



10.- Es considera una circumferència de radi R centrada a l'origen. Des d'un punt P situat a l'eix d'abscisses i exterior a la mateixa, es tracen les tangents a la circumferència. Determineu les coordenades del punt P , tal que el triangle format pels dos punts de tangència i l'origen de coordenades tinga àrea màxima. Oposicions Lleó 2000.

Solució:

Siguen T_1, T_2 els punts de tangència.

Siga $d = \overline{OP}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle OPT_1$:

$$\overline{PT_1} = \sqrt{d^2 - R^2}.$$

Siga M el punt d'intersecció de l'eix d'abscisses i la recta que passa pels punts T_1, T_2 .

Els triangle rectangles $\triangle OPT_1, \triangle OMT_1$ són semblants i la raó de semblança és:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OT_1}} = \frac{d}{R}.$$

Aleshores les àrees dels triangle $\triangle OPT_1, \triangle OMT_1$ són

proporcionals i la raó de semblança és, $\left(\frac{\overline{PT_1}}{\overline{OT_1}}\right)^2 = \frac{d^2}{R^2}$.

$$\frac{d^2}{R^2} = \frac{S_{\triangle OPT_1}}{S_{\triangle OMT_1}} = \frac{\frac{R \cdot \sqrt{d^2 - R^2}}{2}}{S_{\triangle OMT_1}}.$$

$$\text{Aleshores, } S_{\triangle OMT_1} = \frac{R^2}{d^2} \frac{R \sqrt{d^2 - R^2}}{2} = \frac{R^3 \sqrt{d^2 - R^2}}{2d^2}.$$

$$S_{\triangle OT_1T_2} = 2 \cdot S_{\triangle OMT_1} = \frac{R^3 \sqrt{d^2 - R^2}}{d^2}.$$

Considerem la funció, $f(d) = \frac{R^3 \sqrt{d^2 - R^2}}{d^2}$, $d > R$.

Calculem el màxim d'aquesta funció:

$$f'(d) = \frac{-d^2 + 2R^2}{d^3 \sqrt{d^2 - R^2}}.$$

$$f'(d) = 0, \text{ si } d = R\sqrt{2}.$$

$f''(d) < 0$, aleshores, $d = R\sqrt{2}$ és un màxim de la funció.

Les coordenades del punt P que fan màxima d'àrea del triangle són:

$P(R\sqrt{2}, 0)$ o el punt $P'(-R\sqrt{2}, 0)$.

