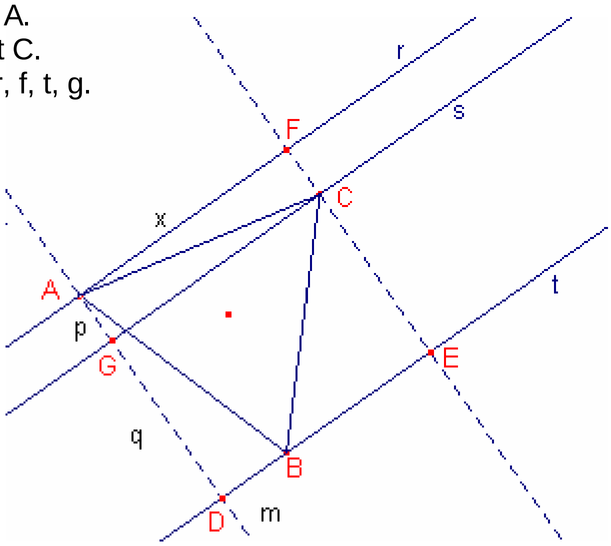
1.- Les rectes r, s, t són paral·leles, s està entre les altres dues a una distància p, q respectivament.
Calculeu el costat d'un triangle equilàter els vèrtexs del qual estan sobre les 3 rectes.

Solució:
Siga la recta f perpendicular a r que passa pel punt A.
Siga la recta g perpendicular a r que passa pel punt C.
Siga el rectangle ADEF que determinen les rectes r, f, t, g.



Siguen $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}=a$

Siguen $\overline{AD}=p+q$ $\overline{AF}=x$ $\overline{DB}=m$

Els triangle $\overset{\Delta}{AFC}$, $\overset{\Delta}{ADB}$, $\overset{\Delta}{BCE}$ són rectangles.

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$a^2=p^2+x^2$.

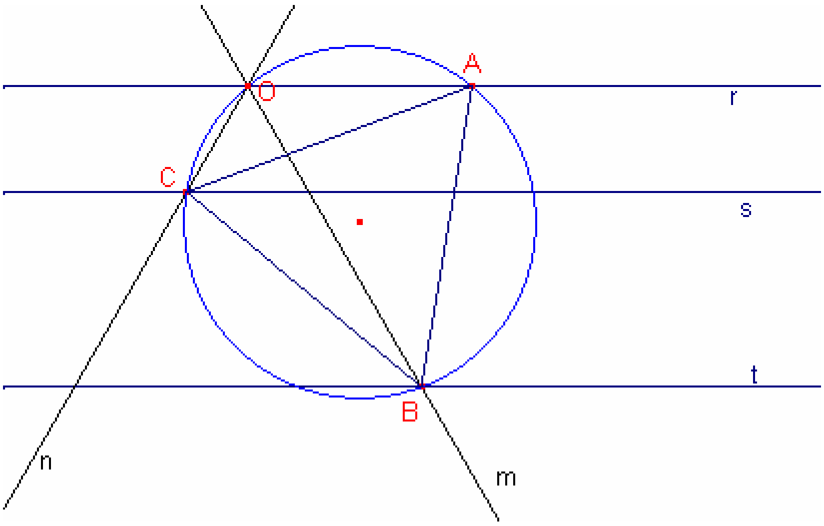
$a^2=(p+q)^2+m^2$.

$a^2=q^2+(x-m)^2$.

Considerem el sistema $\begin{cases} a^2=p^2+x^2 \\ a^2=(p+q)^2+m^2 \\ a^2=q^2+(x-m)^2 \end{cases}$.

Resolent el sistema queda $a=\dfrac{2\sqrt{p^2+q^2+pq}}{\sqrt{3}}$.

Construcció:

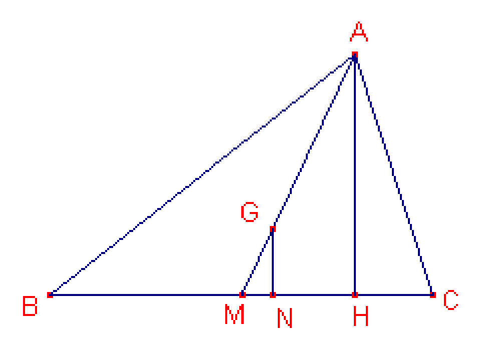


a) Siga O un punt qualsevol de la recta r
b) Dibuixem la recta m que forma un angle de -60º amb la recta t
c) La recta m talla la recta t en el punt B.
d) Dibuixem la recta n que forma un angle de -120º amb la recta s
e) La recta n talla la recta s en el punt C
f) Dibuixem la circumferència que passa pels punts O, B, C
g) la circumferència talla la recta r en el punt A.
El triangle equilàter que cerquem és el ABC.

2.- Siga G el baricentre d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Siguen g_a, g_b, g_c les distàncies de G als costats a, bi c respectivament. Siga r el radi de la circumferència inscrita. Proveu que:

a) $g_a \geq \frac{2r}{3}, g_b \geq \frac{2r}{3}, g_c \geq \frac{2r}{3}$.

b) $\frac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 3$.



Solució Carlos Alberto de Silva:

Siga $\overline{AM}$ la mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga $h_a = \overline{AH}$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga $g_a = \overline{GN}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{GMN}, \overset{\Delta}{AMH}$ són semblants i la raó és $\frac{1}{3}$.

Aleshores, $h_a = 3 \cdot g_a$.

$$S_{ABC} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$a \cdot 3 \cdot g_a = (a+b+c)r$$

$g_a = \frac{1}{3}\left(\frac{a+b+c}{a}\right)r$. Anàlogament, $g_b = \frac{1}{3}\left(\frac{a+b+c}{b}\right)r$, $g_c = \frac{1}{3}\left(\frac{a+b+c}{c}\right)r$

a)
Per la desigualtat trianglular, $b+c > a$.

Aleshores, $g_a = \frac{1}{3}\left(\frac{a+b+c}{a}\right)r > \frac{1}{3}\frac{2a}{a}r = \frac{2}{3}r$.

Anàlogament, $g_b > \frac{2r}{3}, g_c > \frac{2r}{3}$.

b)
Si utilitzem les desigualtats de l'apartat a) no arribem a la solució del problema:

$g_a + g_b + g_c > \frac{2r}{3} + \frac{2r}{3} + \frac{2r}{3} = 2r$, aleshores, $\frac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 2$.

$$g_a + g_b + g_c = \frac{r}{3}\left(\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}\right).$$

$$g_a + g_b + g_c = \frac{r}{3}\left(3 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)$$

Si $x, y > 0$, tenim que, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

Aleshores:

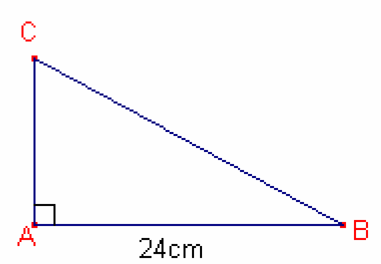
$$g_a + g_b + g_c \geq \frac{r}{3}(3+2+2+2) \geq 3r.$$

Per tant, $\frac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 3$.

3.- Siga un terreny de forma triangle pitagòric (rectangle i els costats són nombres naturals) que el catet menor mesura 24 centímetres. Determineu la longitud dels altres costats a fi que l'àrea siga màxima i mínima.

Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^{o}$, $c = 24$.



Aplicant el teorema de Pitàgores:

$a^2 = b^2 + 24^2$

$a^2 - b^2 = 2^6 \cdot 3^2$

$(a+b)(a-b) = 2^6 \cdot 3^2$

$a+b$ divideix 24^2.

Com que $b > 24$, $a+b > 24$, $a+b \le 24^2$.

Les possibilitats són:

$\begin{cases} a+b=48 \\ a-b=12 \end{cases}$, $\begin{cases} a=30 \\ b=18 \end{cases}$ que no compleix les hipòtesis del problema, $b > 24$.

$\begin{cases} a+b=72 \\ a-b=8 \end{cases}$, $\begin{cases} a=40 \\ b=32 \end{cases}$, $a < b+c$, l'àrea del triangle és $S_{ABC} = \frac{bc}{2} = \frac{24 \cdot 32}{2} = 384$.

$\begin{cases} a+b=96 \\ a-b=6 \end{cases}$, $\begin{cases} a=51 \\ b=45 \end{cases}$, $a < b+c$, l'àrea del triangle és $S_{ABC} = \frac{bc}{2} = \frac{24 \cdot 45}{2} = 540$.

$\begin{cases} a+b=144 \\ a-b=4 \end{cases}$, $\begin{cases} a=74 \\ b=70 \end{cases}$, $a < b+c$, l'àrea del triangle és $S_{ABC} = \frac{bc}{2} = \frac{24 \cdot 70}{2} = 840$.

$\begin{cases} a+b=192 \\ a-b=3 \end{cases}$, $\begin{cases} a=\frac{193}{2} \notin N \\ b=\frac{191}{2} \notin N \end{cases}$ que no compleix les hipòtesis del problema $a, b, c \in N$.

$\begin{cases} a+b=288 \\ a-b=2 \end{cases}$, $\begin{cases} a=145 \\ b=143 \end{cases}$, $a < b+c$, l'àrea del triangle és $S_{ABC} = \frac{bc}{2} = \frac{24 \cdot 145}{2} = 1740$.

$\begin{cases} a+b=276 \\ a-b=1 \end{cases}$, $\begin{cases} a=\frac{277}{2} \notin N \\ b=\frac{275}{2} \notin N \end{cases}$ que no compleix les hipòtesis del problema $a, b, c \in N$.

El triangle de màxima àrea és el de costats, $a = 145cm, b = 143cm, c = 24cm$ i l'àrea màxima és $1740 cm^2$.

El triangle de mínima àrea és el de costats, $a = 40cm, b = 32cm, c = 24cm$ i l'àrea mínima és $384 cm^2$.

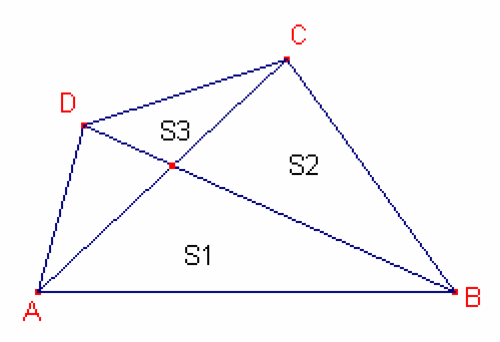
4.- Calculeu l'àrea d'un quadrilàter convex si coneguem l'àrea de tres dels quatre triangles en què queda dividit mitjançant les dues diagonals.

Solució:
Siga el quadrilàter ABCD. Siga O la intersecció de les seues diagonals.

Siga S_1 l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABO}$.

Siga S_2 l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCO}$.

Siga S_3 l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CDO}$.



Calculem l'àrea S del triangle $\overset{\Delta}{DAO}$.
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\overline{AO}}{\overline{CO}} \qquad (1)$$

$$\frac{S}{S_3}=\frac{\overline{AO}}{\overline{CO}} \qquad (2)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2):

$$\frac{S}{S_3}=\frac{S_1}{S_2}$$

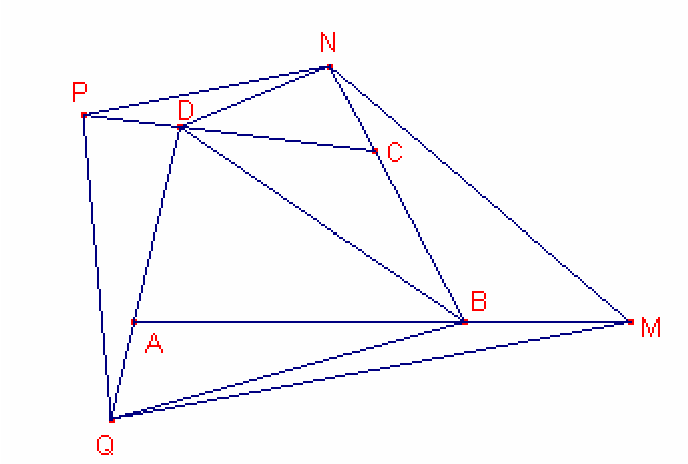
Aleshores, $S=\frac{S_1\cdot S_3}{S_2}$.

Calculem l'àrea del quadrilàter ABCD:

$$S_{ABCD}=S_1+S_2+S_3+S=S_1+S_2+S_3+\frac{S_1\cdot S_3}{S_2}.$$

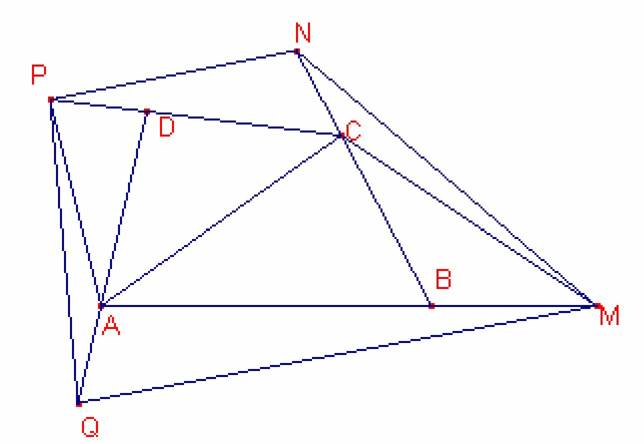
5.- Siga un quadrilàter convex de vèrtexs ABCD la superfície del qual és S. Es prolonga el costat $\overline{AB}$ pel punt B fins un punt M, tal que $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{AB}$. Anàlogament, es prolonga el costat $\overline{BC}$ pel punt C fins un punt N, tal que $\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{BC}$, el costat $\overline{CD}$ és prolonga des de D fins el punt P tal que $\overline{DP}=\frac{1}{2}\overline{CD}$ i per últim es prolonga el costat $\overline{DA}$ des del punt A fins el punt Q, tal que $\overline{AQ}=\frac{1}{2}\overline{DA}$. Calculeu l'àrea del quadrilàter MNPQ.
Oposicions Badajoz 2000.

Solució.
Considerem la diagonal $\overline{BD}$.



Siga S_1 l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABD}$.
Siga S_2 l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$.
$S=S_1+S_2$.
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases:
$\frac{S_{AQB}}{S_1}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{DA}}=\frac{1}{2}$. Aleshores, $S_{AQB}=\frac{1}{2}S_1$.
$\frac{S_{BQM}}{S_{AQB}}=\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}}=\frac{1}{2}$. Aleshores,
$S_{BQM}=\frac{1}{2}S_{AQB}=\frac{1}{4}S_1$.
Anàlogament, $S_{CND}=\frac{1}{2}S_2$, $S_{DNP}=\frac{1}{4}S_2$

Considerem la diagonal $\overline{AC}$.

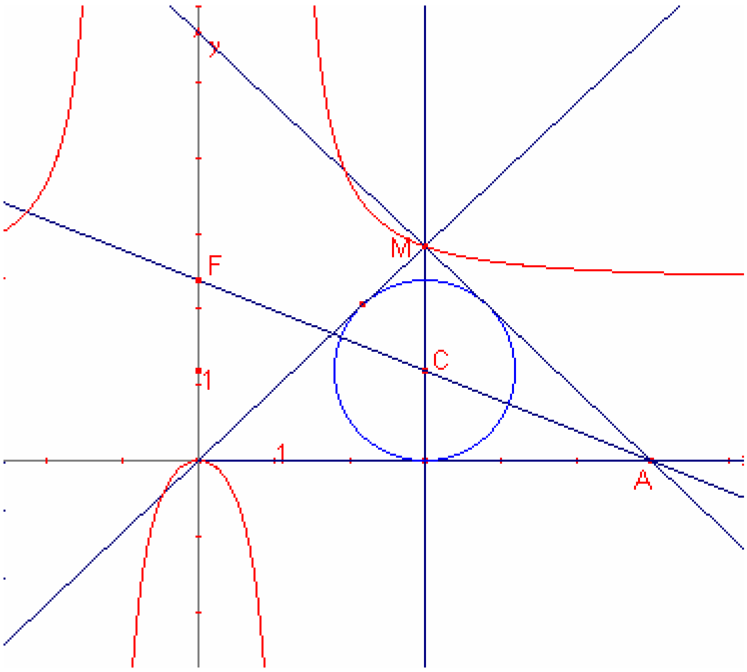


Siga S_3 l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$.
Siga S_4 l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
$S=S_3+S_4$.
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases:
Aleshores, $S_{ADP}=\frac{1}{2}S_3$.
$\frac{S_{BQM}}{S_{AQB}}=\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}}=\frac{1}{2}$, $S_{APQ}=\frac{1}{4}S_3$.
$S_{BMC}=\frac{1}{2}S_4$, $S_{CMN}=\frac{1}{4}S_4$
Calculem l'àrea del quadrilàter MNPQ:

$$S_{MNPQ}=S_{ABCD}+S_{AQM}+S_{BMN}+S_{CNP}+S_{DPQ}=S+\frac{3}{4}S_1+\frac{3}{4}S_4+\frac{3}{4}S_2+\frac{3}{4}S_3=$$
$$=S+\frac{3}{4}(S_1+S_2)+\frac{3}{4}(S_3+S_4)=\left(1+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)S=\frac{5}{2}S.$$

6.- Una circumferència de radi r es mou rodant sobre l'eix d'abscisses, En cada posició de la circumferència es traça la tangent no horitzontal a la circumferència que passa pel l'origen O de coordenades, la qual talla en M a la vertical que passa pel centre C de la circumferència. Pel punt M es traça la tangent a la circumferència (simètrica de l'anterior OM respecte de la vertical CM)mi que talla en A l'eix OX.
a) Determineu l'equació del lloc geomètric dels punts M.
b) Dibuixeu la seua gràfica.
c) Demostreu que la recta AC, passa per un punt fix per a totes les posicions de la circumferència.
Oposicions Astúries 2004.

Solució:
Siga $C(a,r)$ el centre de la circumferència amb a variable.
L'equació de la circumferència és:
$(x-a)^2+(y-r)^2=r^2$
Determinem l'equació de la recta tangent a la circumferència que passa per $O(0,0)$.
Serà de la forma $r\equiv y=mx$. Determinem m:
Els sistema forma per la circumferència i la recta té solució única.
$\begin{cases}(x-a)^2+(y-r)^2=r^2\\ y=mx\end{cases}$ Substituint la segona equació en la primera:
$(1+m^2)x^2+(-2a-2mr)x+a^2=0$ aquesta equació té solució única, aleshores el discriminant de la seua equació és zero:
$(-2a-2mr)^2-4(1+m^2)a^2=0$ Resolent l'equació en m:
$m=0,\ \dfrac{2ra}{a^2-r^2}$. Com la recta no és la horitzontal, l'equació de la recta tangent és:
$r\equiv y=\dfrac{2ra}{a^2-r^2}x$.



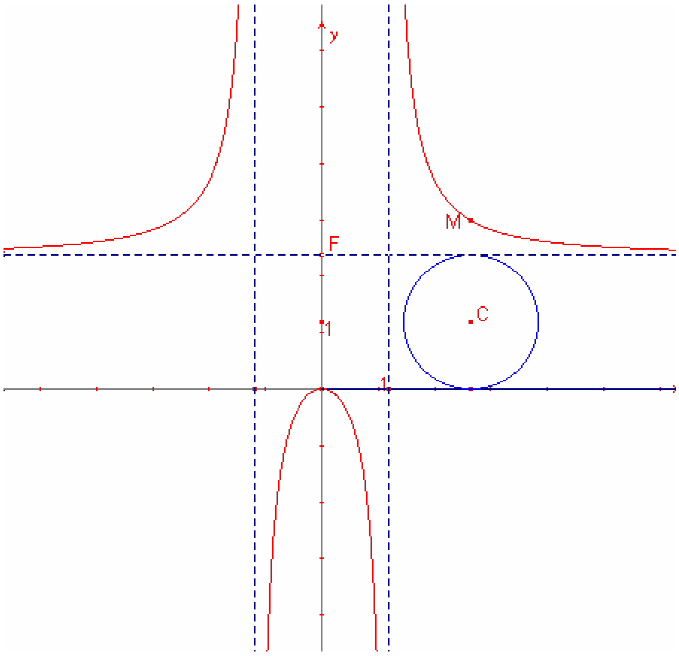
Les coordenades el punt M són:
$M\left(a,\dfrac{2ra^2}{a^2-r^2}\right)$.
Al varia a el punt M recorre la funció,
$f(a)=\dfrac{2ra^2}{a^2-r^2}$.
Estudiem aquesta funció:
El domini de la funció és:
$R\sim\{-r,r\}$.
És contínua i derivable en,
$R\sim\{-r,r\}$
$(0,0)$ és el punt de tall.
La funció és simètrica respecte de l'eix d'ordenades, $f(-a)=f(a)$.

$f'(a)=\dfrac{-4r^3a}{(a^2-r^2)^2}$. $f''(a)=\dfrac{4r^3(3a^2+r^2)}{(a^2-r^2)^3}$.

Estudiant el signe de la primera derivada:
La funció és estrictament creixent en $\left]-\infty,0\right[\sim\{-r\}$
La funció és estrictament decreixent en $\left]0,+\infty\right[\sim\{r\}$
En $a=0$ la funció té un màxim relatiu estricte.
Estudiant el signe de la segona derivada:
La funció és convexa en $\left]-r,r\right[$
La funció és còncava en $R\sim\left[-r,r\right]$
La funció no té punt d'inflexió.
La funció té una asímptota horitzontal en $y=2r$.
La corba va per dalt de l'asímptota quan a s'aproxima a infinit i a menys infinit.
La funció té dues asímptotes verticals:

$a=-r$, $\lim\limits_{a\to -r^-} f(a)=+\infty$, $\lim\limits_{a\to -r^+} f(a)=-\infty$.

$a=r$, $\lim\limits_{a\to r^-} f(a)=-\infty$, $\lim\limits_{a\to r^+} f(a)=+\infty$.



Les coordenades del punt A és el punt simètric de O respecte de la recta CM.
$A(2a,0)$.
L'equació de la recta que passa pels punts $C(a,r)$ i $A(2a,0)$ té equació:

$$s\equiv y=\frac{-r}{a}(x-2a).$$

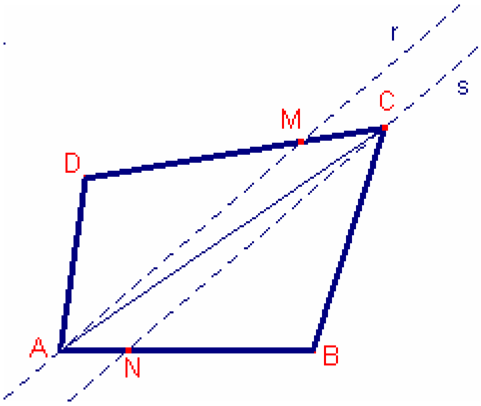
$$s\equiv y=\frac{-r}{a}x+2r.$$

Tot el conjunt de rectes que és formen al variar a passen pel punt fix $F(0,2r)$ que és l'ordenada a l'origen de totes les rectes s.

7.- Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle qualsevol. Amb un punt D s'obté un quadrilàter ABCD. Construïm les bisectrius dels angles $\angle DAB$ i $\angle DCB$. On es troba el punt D a fi que les bisectrius dels angles $\angle DAB$ i $\angle DCB$ siguen paral·leles?.

Solució:

Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle qualsevol. Suposem el problema resolt.
Siga D el punt tal que la bisectriu r de l'angle $\angle BAD$ i la bisectriu s de l'angle $\angle BCD$ són paral·leles.
Siga M el punt on la recta r talla el costat $\overline{CD}$. Siga N el punt on la recta s talla el costat $\overline{AB}$



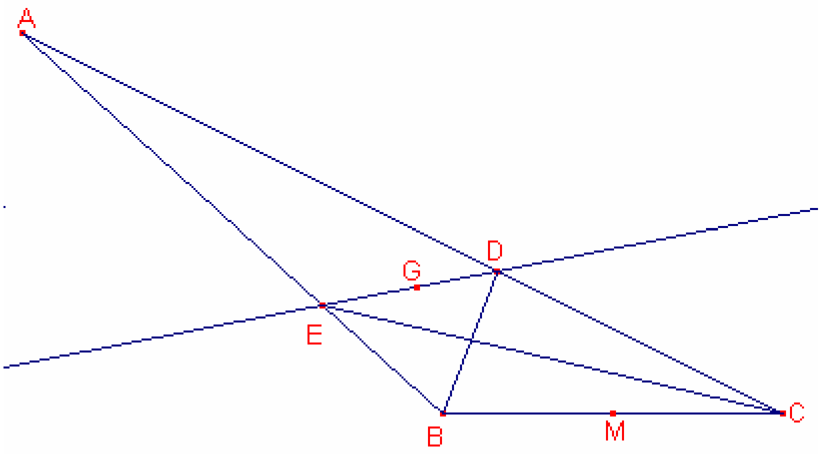
Siga $\alpha = \angle MAB = \frac{1}{2}\angle BAD$. Siga $\beta = \angle BCN = \frac{1}{2}\angle BCD$.
$\angle CNB = \alpha$ per ser r i s rectes paral·leles.
$\angle AMD = \beta$ per ser r i s rectes paral·leles.

La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{BCN}$ és 180º, aleshores, $\angle NBC = 180º - (\alpha + \beta)$.

La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{AMD}$ és 180º, aleshores, $\angle ADM = 180º - (\alpha + \beta)$.
Per tant, l'angle $\angle ADM = \angle ABC$.
Aleshores D és qualsevol punt de l'arc capaç B construït sobre el costat $\overline{AC}$ i exterior al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

8.- Siguen h_a, h_b, h_c, les tres altures del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tals que $h_a = h_b + h_c$.
La recta que passa pels peus de les bisectrius interiors dels angles B i C passa pel baricentre del triangle.
Oposicions Eivissa 2002.

Solució:
Siguen $\overline{BD}$, $\overline{CE}$ bisectrius interiors del triangle.



$S_{ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$.

Si $h_a = h_b + h_c$, aleshores,

$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Aleshores, $a = \frac{bc}{a+b}$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$

Siga $\overrightarrow{AB} = b \cdot \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = c \cdot \vec{v}$, $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ linealment independents.

$\overrightarrow{AM} = \frac{c}{2}\vec{u} + \frac{b}{2}\vec{v}$.

Aplicant la propietat del baricentre:

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{c}{3}\vec{u} + \frac{b}{3}\vec{v}$.

Siga $x = \overline{BE}$, $y = \overline{CD}$. Aplicant la propietat de la bisectriu:

$\frac{x}{a} = \frac{c-x}{b}$, $\frac{x}{\frac{bc}{b+c}} = \frac{c-x}{b}$. Aleshores, $x = \frac{c^2}{b+2c}$.

Anàlogament, $y = \frac{b^2}{c+2b}$.

$\overrightarrow{AE} = (c-x)\vec{u} = \frac{bc+c^2}{b+2c}\vec{u}$.

$\overrightarrow{AD} = (b-y)\vec{v} = \frac{bc+b^2}{c+2b}\vec{v}$.

$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} = -\left(\frac{bc+c^2}{b+2c}\right)\vec{u} + \left(\frac{bc+b^2}{c+2b}\right)\vec{v}$.

$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AE} = \frac{c}{3}\vec{u} + \frac{b}{3}\vec{v} - \left(\frac{bc+c^2}{b+2c}\right)\vec{u} = \left(\frac{-c(2b+c)}{3(b+2c)}\right)\vec{u} + \frac{b}{3}\vec{v}$.

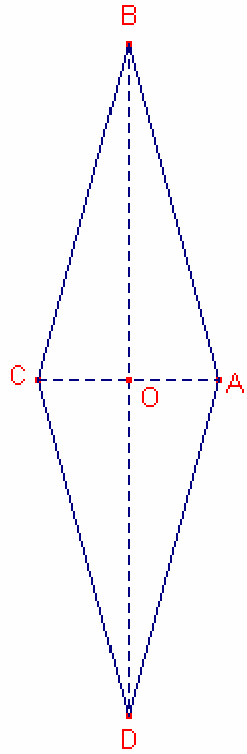
Vegem que $\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EG}$ són linealment independents.

$$\frac{-\frac{bc+c^2}{b+2c}}{\frac{-c(2b+c)}{3(b+2c)}} = \frac{\frac{bc+b^2}{c+2b}}{\frac{b}{3}}.$$

Simplificant:

$\frac{1}{2b+c} = \frac{1}{2b+c}$. Aleshores, G pertany a la recta que passa pels punts E, D.

9.- Determineu l'angle agut d'un rombe, el costat del qual és mitjana proporcional de les seues diagonals.
Shariguin I31.



Solució 1:
Siga ABCD un rombe de costat c i diagonals D, d.
Siga $\alpha = \angle ABC$ l'angle agut del rombe.
Siga O la intersecció de les diagonals.
Per hipòtesi el costat del qual és mitjana proporcional de les seues diagonals, aleshores, $\frac{D}{c} = \frac{c}{d}$, per tant, $c^2 = Dd$ (1)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$:

$$c^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \qquad (2)$$

Igualant les expressions (1) (2):
$4Dd = D^2 + d^2$. Dividint l'expressió per D^2:
$4\frac{d}{D} = 1 + \left(\frac{d}{D}\right)^2$. Resolent l'equació en $\frac{d}{D}$:
$\frac{d}{D} = 2 \pm \sqrt{3}$. $\quad \frac{d}{D} = \text{tg}\frac{\alpha}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$
Aleshores, $\frac{\alpha}{2} = \text{arctg}\left(2 - \sqrt{3}\right) = 15^\text{o}$, aleshores, $\alpha = 30^\text{o}$.
$\frac{\alpha}{2} = \text{arctg}\left(2 + \sqrt{3}\right) = 75^\text{o}$, aleshores, $\alpha = 150^\text{o}$ que no és la solució ja que és obtús.

Solució 2:
Siga $\alpha = \angle ABC$ l'angle agut del rombe.
Per hipòtesi el costat del qual és mitjana proporcional de les seues diagonals, aleshores, $\frac{D}{c} = \frac{c}{d}$, per tant, $c^2 = Dd$
El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles, aleshores, $\angle CAB = 90^\text{o} - \frac{\alpha}{2}$.

$\frac{d}{D} = \text{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

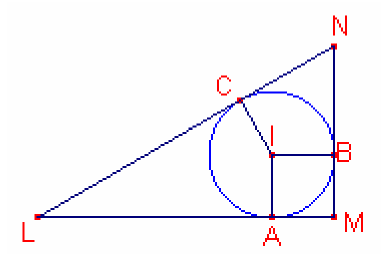
$\frac{d}{\sin\alpha} = \frac{c}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. Elevant al quadrat, $\frac{d^2}{\sin^2\alpha} = \frac{c^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{Dd}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$, simplificant:

$\frac{d}{D}\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. $\qquad \text{tg}\frac{\alpha}{2}\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. Simplificant:

$\sin\frac{\alpha}{2}\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. $\quad \sin\alpha = \frac{1}{2}$. Aleshores, $\alpha = 30^\text{o}$.

10.- En una circumferència de radi r s'escullen 3 punts de manera que la circumferència queda dividida en tres arcs que estan en proporció 3:4:5. Des d'aquests punts són traçades les tangents a la circumferència. Determineu l'àrea del triangle format per les tres tangents.
Shariguin I36

Solució:
Siga la circumferència de radi r i siguen A, B, C els punts de la circumferència tals que els arcs AB, BC, CA estan en proporció 3:4:5



$$\frac{AB}{3}=\frac{BC}{4}=\frac{CA}{5}=\frac{360^{o}}{12}.$$

Aleshores, els arcs mesuren: $AB=90^{o}, BC=120^{o}, CA=150^{o}$.

Siguen L, M, N les interseccions (dos a dos) de les rectes tangents a la circumferència en els punts A, B, C.

Per ser angles exteriors:

$\angle NLM=30^{o}, \angle LMN=90^{o}, \angle MNL=60^{o}$.

Siga $l=\overline{MN}, m=\overline{LN}, n=\overline{LM}$.

$\frac{l}{m}=\frac{1}{2}$, $\frac{n}{l}=\sqrt{3}$. Aleshores, $m=2l, n=l\sqrt{3}$.

Per ser el triangle $\overset{\Delta}{LMN}$ rectangle, $M=90^{o}$, $r=\overline{AM}=\frac{l+m+n}{2}-m$.

$r=\frac{l+2l+l\sqrt{3}}{2}-2l=\frac{(-1+\sqrt{3})l}{2}$, aïllant l: $l=\frac{2}{-1+\sqrt{3}}r$

La circumferència de radi r és inscrita al triangle $\overset{\Delta}{LMN}$:

$$S_{LMN}=\frac{l+m+n}{2}r.$$

$$S_{LMN}=\frac{l+m+n}{2}r=\frac{(3+\sqrt{3})l}{2}r=\frac{(3+\sqrt{3})}{2}\frac{2}{-1+\sqrt{3}}r^{2}=(2\sqrt{3}+3)r^{2}.$$