15 problemes de teoria de nombres.

Ricard PEIRÓ I ESTRUCH

1.- Estudieu si existeix un nombre natural n tal que 2^2 divideix a n, 3^2 divideix a n+1, 4^2 divideix a n+2.

Solució:
Provarem que no existeix cap natural n que complesca la propietat per reducció a l'absurd.

Suposem que 4|n, aleshores existeix $k \in N$ tal que $4k = n$
Suposem que 9|(n+1), aleshores existeix $l \in N$ tal que 9l=n+1
Suposem que 16|(n+2), aleshores existeix $m \in N$ tal que 16m=n+2

Aïllant n de les 3 equacions tindríem:

$$\begin{cases} 9l - 4k = 1 \\ 16m - 9l = 1 \end{cases}$$

Sumant ambdues equacions:

$$16m - 4k = 2 \quad \Rightarrow \quad 8m - 2k = 1 \quad \Rightarrow \quad 8m = 2k + 1$$

La qual cosa és absurda, perquè aquesta equació no tindria solució en els nombres naturals ja que 8n és un nombre parell i 2k+1 és un nombre imparell.

Per tant no existeix $n \in N$ tal que 2^2 divideix a n, 3^2 divideix a n+1, 4^2 divideix a n+2.

2.-

a) Comproveu que $2^5 \cdot 9^2 = 2592$

b) Estudieu si és possible que $2^5 \cdot a^b = (25ab)_{10}$, per a valors distints dels de l'apartat anterior.

Solució:

b)

Suposem que $2^5 \cdot a^b = (25ab)_{10}$ on $0 \le a \le 9, \quad 0 \le b \le 9$

Aleshores:

$2500 \le 32 \cdot a^b \le 2599$

Dividint la inequació entre 32:

$78 < a^b \le 81$

Els únics naturals a, b que verifiquen la inequació són:

i) $a = 3, \quad b = 4$

ii) $a = 9, \quad b = 2$

La primera solució de la inequació no és solució del problema perquè 2534 no és múltiple de 4, per tant tampoc és múltiple de 32.

La segona, al descompondre $2592 = 2^5 \cdot 9^2$.

3.- Siguen a i b dos nombres naturals.
Calculeu el nombre de múltiples de b que apareixen en la successió $a, 2a, 3a, ..., ba$

Solució:

❶
Suposem que mcd(a,b)=1. Demostrem que hi ha 1 múltiple de b en la successió.

Suposem que existeix $n \in N \quad 1 \le n < b$ tal que na siga múltiple de b.
Aleshores existeix $m \in N$ tal que $\begin{cases} na = mb \\ mcd(a, b) = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad a \mid m \quad \Rightarrow$ Existeix $k \in N$ tal que $m = ka \quad \Rightarrow \quad na = kab \quad \Rightarrow \quad n = kb \quad \Rightarrow \quad n \ge b$, la qual cosa és absurda.

❷
Suposem que mcd(a,b)=d. Demostrem que hi ha d múltiples de b en la successió.
Per ser mcd(a,b)=d tenim que $a = md, \quad b = nd$ i a més a més $mcd(m, n) = 1$
Són múltiples de b:
na, 2na, 3na,........, dna=ab. En total d múltiples.
Demostrem que només hi ha aquests múltiples.

Suposem que existeix $x \in N$ tal que $in < x < (i+1)n$ (*) per a algun i=1,2,....,d−1 tal que xa siga múltiple de b.
Aleshores existeix $y \in N$ tal que $xa = yb$.
Simplificant $\begin{cases} xm = yn \\ mcd(m, n) = 1 \end{cases} \Rightarrow$ n és múltiple de x $\Rightarrow$ existeix $r \in N$ tal que $n = rx \quad r \ge 1$
Substituint en (*)
$irx < x < (i+1)rx$ on $x \in N \quad \Rightarrow \quad ir < 1$ la qual cosa és absurda ja que $i, r \in N$

Per tant unint els dos casos:
Si a, b són nombres naturals ens la successió $a, 2a, 3a, ..., ba$ hi ha tants múltiples de b com mcd(a,b).

4.- Determineu tots els parells de nombres naturals (a,b) tals que
$\text{mcd}(a,b)=18, \quad \text{mcm}(a,b)=540$

Solució:

$\text{mcd}(a,b)=18=2\cdot 3^2$

$\text{mcm}(a,b)=540=2^2\cdot 3^3\cdot 5$

Els nombres a, b han de tenir factors comuns 2 i 3, i un dels dos nombres ha de tenir el factor 5.

Les úniques 4 possibilitats són:

i) $a=2\cdot 3^2=18 \quad b=5\cdot 2^2\cdot 3^3=540$

ii) $a=2\cdot 3^3=54 \quad b=5\cdot 2^2\cdot 3^2=180$

iii) $a=2^2\cdot 3^2=36 \quad b=5\cdot 2\cdot 3^3=270$

iv) $a=2^2\cdot 3^3=108 \quad b=5\cdot 2\cdot 3^2=90$

5.- Determineu una terna de nombres enters (x,y,z) que complesca
$\text{mcd}(198,288,512) = 198x + 288y + 512z$

Solució:
L'equació té solució.
$\text{mcd}(198,288,512) = 2$

$2 = 198x + 288y + 512z$

Simplificant:

$1 = 99x + 144y + 256z \quad \Rightarrow \quad 1 = 9(11x + 16y) + 256z \quad \Rightarrow \quad 11x + 16y = \dfrac{1-256z}{9} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow 1-256z$ és múltiple de 9.

Un enter que ho compleix és $z = -2$
Per tant,

$11x + 16z = \dfrac{513}{9} = 57; \quad 11x + 16y = 57$

Busquem una solució de l'equació $11x + 16y = 57$ (*) utilitzant l'algoritme d'Euclides:

	1	2
16	11	5
5	1	

$\begin{cases} 16 - 11 = 5 \\ 11 = 2 \cdot 5 + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 \cdot 16 - 2 \cdot 11 = 2 \cdot 5 \\ 11 = 2 \cdot 5 + 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot 11 - 2 \cdot 16 = 1$

Una solució particular de l'equació (*) és $x = 3 \cdot 57, \quad y = -2 \cdot 57$

Una terna que compleix l'equació $\text{mcd}(198,288,512) = 198x + 288y + 512z$ és:
$(x = 171,\ y = -114,\ z = -2)$

6.- Demostreu que el nombre real $\log_2 3$ és irracional.

Demostració per reducció a l'absurd:

Suposem que $\log_2 3 = \frac{p}{q}$ tal que $p, q \in N$

Aleshores, $2^{p/q} = 3$
Elevant a la potència q
$2^p = 3^q$ Aquesta igualtat és absurda ja que 2^p és un nombre parell i 3^q és un nombre imparell (el producte de nombres imparells és imparell)

7.- Demostreu que l'última xifra decimal de $2^{2^n}+1$ és 7 per a tot nombre natural n major o igual que 2.

Demostració per inducció completa:

Aquesta proposició és equivalent a demostrar que l'última xifra decimal de 2^{2^n} és 6 per a tot nombre natural n major o igual que 2.

❶
Demostrem la igualtat per a n=2

$2^{2^2}=16=10+6$

❷
Suposem la propietat certa per a n=k>2.

L'última xifra decimal de 2^{2^k} és 6 $\Rightarrow$ $2^{2^k}=a\cdot 10+6,$ on $a\in N$

❸
Demostrem la propietat per a n=k+1

$2^{2^{k+1}}=\left(2^{2^k}\right)^2=(10a+6)^2$ (aplicant la hipòtesi d'inducció)

$$2^{2^{k+1}}=\left(2^{2^k}\right)^2=(10a+6)^2=100a^2+12\cdot 10a+36=$$
$$=100(a^2+a)+(2a+3)10+6=$$
$$=10(10a^2+10a+2a+3)+6$$

Per tant, l'última xifra de $2^{2^{k+1}}$ és 6.

8.- Demostreu que l'equació $x^2 + y^2 = x^2 y^2$ no té solució en els nombres naturals.

Demostració per reducció a l'absurd:

Suposem que y=1 $\Rightarrow$ $1 + x^2 = x^2$ $\Rightarrow$ $1 = 0$, absurd per tant $y > 1$
Anàlogament $x > 1$

$x^2 + y^2 = x^2 y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = (x^2 - 1) y^2 \quad (*)$
Aleshores, per ser x^2 un quadrat perfecte $\Rightarrow$ $x^2 - 1$ és un quadrat perfecte.
Per tant,
existeix $a \in N$ tal que $x^2 - 1 = a^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = a^2 + 1$
Substituint en l'equació (*)
$a^2 + 1 = a^2 y^2 \quad \Rightarrow \quad 1 = a^2 (y^2 - 1)$
Aquesta darrera igualtat és absurda ja que $y^2 - 1 > 1$ i $a \geq 1$

9.- Sense efectuar la multiplicació, calculeu la xifra a en el producte en base 10.
$89878 \cdot 58965 = 5299a56270$

Solució:
Siga $A = 5299a56270$
$89878 = 2 \cdot 44939, \quad 58965 = 3 \cdot 5 \cdot 3931$
El nombre A és divisible per 3, però no és divisible per 9.
Aplicant el criteri de divisibilitat per 3:
$A \equiv 5+2+9+9+a+5+6+2+7+0(\text{mòd}\,3) \equiv 45+a(\text{mòd}\,3) \equiv a(\text{mòd}\,3)$
$A \equiv 0(\text{mòd}3)$

Per tant els valors poden ser a=0, 3, 6, 9

Aplicant el criteri de divisibilitat per 9.
$A \equiv 45+a(\text{mòd}9) \equiv a(\text{mòd}\,9)$
$89878 \equiv 4(\text{mòd}9)$
$58965 \equiv 6(\text{mòd}9)$
Per tant $A \equiv 24(\text{mòd}\,9) \equiv 6(\text{mòd}9)$

Aleshores la solució és a=6.

10.- Utilitzant la congruència $19^2 \equiv 2^2(\text{mòd}119)$ descomponeu en factors primers el nombre 119.

Solució:
$19^2 \equiv 2^2(\text{mòd}119)$
$19^2 - 2^2 \equiv 0(\text{mòd}119) \quad \Rightarrow \quad (19+2)(19-2) \equiv 0(\text{mòd}119)$
$21 \cdot 17 \equiv 0(\text{mòd}119)$
Per tant, $21 \cdot 17$ és múltiple de 119. Aleshores,
existeix $a \in Z$ tal que $21 \cdot 17 = 119 \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = 3$
Per tant $119 = 7 \cdot 17$

11.- Calculeu el residu de la divisió del producte $2^{50} \cdot 41^{65}$ entre 7.

Solució:

$$\left.\begin{array}{l} 2^{49} \equiv \left(2^{7}\right)^{7} (\text{mòd}\, 7) \underset{(*)}{\equiv} 2^{7} (\text{mòd}\, 7) \underset{(*)}{\equiv} 2 (\text{mòd}\, 7) \\ 2 \equiv 2 (\text{mòd}\, 7) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 2^{50} \equiv 4 (\text{mòd}\, 7)$$

$$41^{65} \equiv \left(6 \cdot 7 - 1\right)^{65} (\text{mòd}\, 7) \underset{(**)}{\equiv} \left(-1\right)^{65} (\text{mòd}\, 7) \equiv -1 (\text{mòd}\, 7)$$

Aleshores,

$2^{50} \cdot 41^{65} \equiv -4 (\text{mòd}\, 7) \equiv 3 (\text{mòd}\, 7)$

Per tant el residu de la divisió és 3.

Notes:

(*) Teorema de Fermat: Si p és un nombre primer $a^{p} \equiv a (\text{mòd } p)$

(**) $an - 1 \equiv -1 (\text{mòd } n)$

12.- Determineu totes les solucions enteres de l'equació diofàntica
$101x + 102y + 103z = 1$

Solució:

mcd(101,102,103)=1, per tant l'equció té solució.

$101x + 102y = 1 - 103z$ (*)
Resolem l'equació en les incògnites x, y. Notem que mcd(101,102)=1, per tant l'equació té solució.

Siga $z = \alpha, \quad \alpha \in Z$

Resolem l'equació $101x + 102y = 1$.
Una solució particular és $x = -1, \quad y = 1$
Les seues solucions són $\left(x = -1 + 102\beta, \quad y = 1 - 101\beta\right) \quad \beta \in Z$

Les solucions de l'equació (*) són:
$$\begin{cases} x = -(1 + 103\alpha) + 102\beta \\ y = (1 - 103\alpha) - 101\beta \qquad \text{on } \alpha, \beta \in Z \\ z = \alpha \end{cases}$$

13.- Determineu les solucions enteres del sistema següent:

$$\begin{cases} x+y+z=31 \\ x+2y+3z=41 \end{cases}$$

Solució:
Restant ambdues equacions:

$$\begin{cases} x+y+z=31 \\ y+2z=10 \end{cases}$$

Resolem l'equació $y+2z=10$ la qual té solució ja que mcd(1,2)=1.
Una solució particular és $(y=10,\ z=0)$.
Per tant, la solució de l'equació és $(y=10-2\alpha,\ z=\alpha)\quad \alpha\in Z$

Substituint en la primera equació del sistema:
$x+10-2\alpha+\alpha=31\quad \alpha\in Z$

Per tant les solucions del sistema són:

$$\begin{cases} x=21+\alpha \\ y=10-2\alpha \quad \text{on } \alpha\in Z \\ z=\alpha \end{cases}$$

14.- Determineu tots el nombres naturals m tals que $1066 \equiv 1776(\text{mòd } m)$

Solució:
$1066 \equiv 1776(\text{mòd } m) \quad \Rightarrow \quad -710 \equiv 0(\text{mòd } m) \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad 710$ és múltiple de m

$710 = 2 \cdot 5 \cdot 71$

Les solucions per a m són:
i) $m = 2$
ii) $m = 5$
iii) $m = 10$
iv) $m = 71$
v) $m = 142$
vi) $m = 355$
vii) $m = 710$

15.- Demostreu que si n és un nombre natural aleshores $4^n \equiv 1+3n(\text{mòd}\,9)$

Demostració per inducció completa:

❶
Demostrem la propietat per a n=1
$4^1 \equiv 1+3\cdot 1(\text{mòd}\,9) \quad \Rightarrow \quad 4 \equiv 4(\text{mòd}\,9)$

❷
Suposem certa la propietat per a n=k
$4^k \equiv 1+3k(\text{mòd}\,9)$

❸
Demostrem la propietat per a n=k+1
$4^{k+1} \equiv 4^k \cdot 4(\text{mòd}\,9)$
Aplicant la hipòtesi d'inducció:
$$4^{k+1} \equiv 4^k \cdot 4(\text{mòd}\,9) \equiv (1+3k)4(\text{mòd}\,9) \equiv 4+12k(\text{mòd}\,9) \equiv$$
$$\equiv 4+9k+3k(\text{mòd}\,9) \equiv 4+3k(\text{mòd}\,9) \equiv 1+3(k+1)(\text{mòd}\,9)$$