

Problemes Nombres 10

1.- Siga $N^* = N \cup \{0\}$.

Definim la funció $f : N^* \times N^* \rightarrow N$ de la forma següent:

a) $f(0, y) = y + 1$.

b) $f(x + 1, 0) = f(x, 1)$.

c) $f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$.

Calculeu $f(2, n)$, $f(3, n)$.

Solució:

$$f(1, 0) \underset{b)}{=} f(0, 1) \underset{a)}{=} 2.$$

Calculem $f(1, n)$.

$$f(1, 1) \underset{c)}{=} f(0, f(1, 0)) \underset{a)}{=} f(1, 0) + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Siga $n \geq 1$

$$f(1, n) \underset{c)}{=} f(0, f(1, n - 1)) \underset{a)}{=} f(1, n - 1) + 1.$$

$$f(1, n) = f(1, n - 1) + 1.$$

$$f(1, n + 1) = f(1, n) + 1.$$

Restant ambdues expressions:

$f(1, n + 1) - 2 \cdot f(1, n) + f(1, n - 1)$, que és una successió recurrent.

La seua equació característica és:

$$x^2 - 2x + 1 = 0, \text{ les seues arrels són } x = 1, 1.$$

Aleshores:

$$f(1, n) = A \cdot 1^n + B \cdot n \cdot 1^n.$$

$$f(1, n) = A + B \cdot n.$$

Si $n = 0$, $2 = A$.

Si $n = 1$, $3 = A + B$.

Aleshores, $A = 2$, $B = 1$.

Aleshores, $f(1, n) = 2 + n \quad \forall n \in N^* \quad (1)$

Calculem $f(2, n)$:

$$f(2, 0) \underset{b)}{=} f(1, 1) \underset{(1)}{=} 2 + 1 = 3.$$

$$f(2, 1) \underset{c)}{=} f(1, f(2, 0)) \underset{(1)}{=} f(2, 0) + 2 = 3 + 2 = 5.$$

Siga $n \geq 1$

$$f(2, n) \underset{c)}{=} f(1, f(2, n - 1)) \underset{(1)}{=} f(2, n - 1) + 2.$$

$$f(2, n) = f(2, n - 1) + 2.$$

$$f(2, n + 1) = f(2, n) + 2.$$

Restant ambdues expressions:

$f(2, n + 1) - 2 \cdot f(2, n) + f(2, n - 1)$, que és una successió recurrent.

La seua equació característica és:

$$x^2 - 2x + 1 = 0, \text{ les seues arrels són } x = 1, 1.$$

Aleshores:

$$f(2, n) = A \cdot 1^n + B \cdot n \cdot 1^n$$

$$f(2,n) = A + B \cdot n.$$

$$\text{Si } n = 0, \quad 3 = A.$$

$$\text{Si } n = 1, \quad 5 = A + B.$$

$$\text{Aleshores, } A = 3, \quad B = 2.$$

$$\text{Aleshores, } f(2,n) = 3 + 2n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2)$$

Calculem $f(3,n)$:

$$f(3,0) \underset{b)}{=} f(2,1) \underset{(2)}{=} 3 + 2 = 5.$$

$$f(3,1) \underset{c)}{=} f(2, f(3,0)) \underset{(2)}{=} 3 + 2 \cdot f(3,0) = 3 + 2 \cdot 5 = 13.$$

Siga $n \geq 1$

$$f(3,n) \underset{c)}{=} f(2, f(2, n-1)) \underset{(2)}{=} 3 + 2 \cdot f(2, n-1).$$

$$f(3, n) = 2 \cdot f(2, n-1) + 3.$$

$$f(3, n+1) = 2 \cdot f(2, n) + 3.$$

Restant ambdues expressions:

$$f(3, n+1) - 3 \cdot f(2, n) + 2 \cdot f(2, n-1), \text{ que és una successió recurrent.}$$

La seua equació característica és:

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \text{ les seues arrels són } x = 1, 2.$$

Aleshores:

$$f(2,n) = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n.$$

$$f(2,n) = A + B \cdot 2^n.$$

$$\text{Si } n = 0, \quad 5 = A + B.$$

$$\text{Si } n = 1, \quad 13 = A + 2B.$$

$$\text{Resolent el sistema, } A = -3, \quad B = 8.$$

$$\text{Aleshores, } f(3,n) = -3 + 8 \cdot 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (3)$$

2.- Determineu tots els possibles valors per al màxim comú divisor de $n^2 + 1$, $3n + 1$ on n és un nombre natural.

Solució:

3 no és divisor de $3n + 1$.

$$\text{mcd}(n^2 + 1, 3n + 1) = \text{mcd}(9(n^2 + 1), 3n + 1).$$

Suposem $n > 3$

Apliquem l'algoritme d'Euclides als nombres naturals, $9n^2 + 9$, $3n + 1$

	$3n - 1$
$9n^2 + 9$	$3n + 1$
10	

$$\text{mcd}(n^2 + 1, 3n + 1) = \text{mcd}(9(n^2 + 1), 3n + 1) = \text{mcd}(3n + 1, 10)$$

Aleshores els possibles valors del mcd són els divisors de 10:

1, 2, 5, 10.

Si $n = 1$:

$$\text{mcd}(1^2 + 1, 3 \cdot 1 + 1) = 2.$$

Si $n = 2$:

$$\text{mcd}(2^2 + 1, 3 \cdot 2 + 1) = 1.$$

Si $n = 3$:

$$\text{mcd}(3^2 + 1, 3 \cdot 3 + 1) = 10.$$

3.- Siga $t_n = n^2 + 20$, per a $n \geq 1$ el terme general d'una successió. Demostreu que per a tot $n \geq 1$, el màxim comú divisor de t_n i t_{n+1} ha de ser divisor de 81.
Crux Mathematicorum M301.

Solució:

Siga $a, b \in \mathbb{Z}$, $a = bq + r$, $q, r \in \mathbb{Z}$. Aleshores, $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r)$.

$$t_{n+1} = n^2 + 2n + 21.$$

Apliquem l'algoritme d'Euclides per a calcular el màxim comú divisor (mcd):

	1
$t_{n+1} = n^2 + 2n + 21$	$t_n = n^2 + 20$
$2n + 1$	

$$\text{mcd}(t_{n+1}, t_n) = \text{mcd}(t_n, 2n + 1).$$

Estudiem dos casos.

a)

Suposem que n és parell $n = 2k$, $t_n = 4k^2 + 20$, $2n + 1 = 4k + 1$.

	k	-4
$t_n = 4k^2 + 20$	$2n + 1 = 4k + 1$	$-k + 20$
$-k + 20$	81	

$$\text{mcd}(t_{n+1}, t_n) = \text{mcd}(t_n, 2n + 1) = \text{mcd}(2k + 1, 81).$$

Aleshores, el màxim comú divisor de t_n i t_{n+1} ha de ser divisor de 81.

b)

Suposem que n és imparell $n = 2k + 1$, $t_n = 4k^2 + 2k + 21$, $2n + 1 = 4k + 3$.

	k	-4
$t_n = 4k^2 + 2k + 21$	$2n + 1 = 4k + 3$	$-k + 21$
$-k + 21$	-81	

$$\text{mcd}(t_{n+1}, t_n) = \text{mcd}(t_n, 2n + 1) = \text{mcd}(2n + 1, -81).$$

Aleshores, el màxim comú divisor de t_n i t_{n+1} ha de ser divisor de 81.

4.- Siguen a, b, c tres nombres reals tal que les sumes $a + b + c$, $ab + bc + ca$ siguem nombres racionals. Demostreu que $a^4 + b^4 + c^4$ és un nombre racional si i només si abc és un nombre racional.
Crux Mathematicorum M304.

Solució:

Siga $p = a + b + c \in \mathbb{Q}$, $q = ab + bc + ca \in \mathbb{Q}$, $r = abc \in \mathbb{R}$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca).$$

$$\text{Aleshores, } a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 2q \quad (1)$$

Aplicant les fórmules de Cardano-Vieta:

$a, b, c \in \mathbb{R}$ són solucions de l'equació: $x^3 - px^2 + qx - r = 0$.

$$x^3 = px^2 - qx + r.$$

Aleshores:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= pa^2 - qa + r + pb^2 - qb + r + pc^2 - qc + r = \\ &= p(a^2 + b^2 + c^2) + q(a + b + c) + 3r. \end{aligned}$$

Substituint l'expressió (1):

$$a^3 + b^3 + c^3 = p(p^2 - 2q) + qp + 3r = p^3 - pq + 3r \quad (2)$$

$x^4 = px^3 - qx^2 + rx$, a, b, c són solucions d'aquesta equació. Aleshores:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= pa^3 - qa^2 + ra + pb^3 - qb^2 + rb + pc^3 - qc^2 + rc = \\ &= p(a^3 + b^3 + c^3) + q(a^2 + b^2 + c^2) + r(a + b + c) \end{aligned}$$

Substituint l'expressió (1) i (2):

$$a^4 + b^4 + c^4 = p(p^3 - pq + 3r) + q(p^2 - 2q) + rp = p^4 - 2q^2 + 4pr \quad (3)$$

Vegem la tesi del problema.

Si $r = abc \in \mathbb{Q}$ de la identitat (3) tenim que $a^4 + b^4 + c^4$ és racional.

Si $a^4 + b^4 + c^4$ és racional i $p \neq 0$, de la identitat (3) tenim que $r = abc \in \mathbb{Q}$.

Si $a^4 + b^4 + c^4$ és racional i $p = 0$, de la identitat (3) $a^4 + b^4 + c^4 = -2q^2$.

Aleshores, $q = 0$, $a^4 + b^4 + c^4 = 0$.

$a, b, c \in \mathbb{R}$ són solucions de l'equació: $x^3 - r = 0$. Aleshores, $r = 0$.

5.- Demostreu que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ és múltiple de 7.
Fase local Olimpíada Espanyola 2008.

Solució:

Teorema de Fermat: Si p és un nombre primer $a^p \equiv a \pmod{p}$

$$2222 = 7 \cdot 317 + 3$$

$$5555 = 7 \cdot 793 + 4$$

$$2222^{5555} + 5555^{2222} = (7 \cdot 317 + 3)^{7 \cdot 793 + 4} + (7 \cdot 793 + 4)^{7 \cdot 317 + 3} \equiv (3^{793})^7 3^4 + (4^{317})^7 4^3 \pmod{7}$$

Aplicant el teorema de Fermat:

$$2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv (3^{793})^7 3^4 + (4^{317})^7 4^3 \pmod{7}$$

$$317 = 7 \cdot 45 + 2, \quad 793 = 7 \cdot 113 + 2, \quad 3^4 = 81 \equiv 4 \pmod{7}, \quad 4^3 = 64 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$\begin{aligned} 2222^{5555} + 5555^{2222} &\equiv (3^{793})^7 3^4 + (4^{317})^7 4^3 \pmod{7} \equiv (3^{113})^7 3^2 \cdot 4 + (4^{45})^7 4^2 \cdot 1 \pmod{7} \equiv \\ &\equiv 3^{113} \cdot 36 + 4^{45} \cdot 16 \end{aligned}$$

$$113 = 7 \cdot 16 + 1, \quad 45 = 7 \cdot 6 + 3, \quad 36 \equiv 1 \pmod{7}, \quad 16 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$\begin{aligned} 2222^{5555} + 5555^{2222} &\equiv 3^{113} \cdot 36 + 4^{45} \cdot 16 \equiv (3^{16})^7 \cdot 3 \cdot 1 + (4^6)^7 \cdot 4^3 \cdot 2 \pmod{7} \equiv \\ &\equiv 3^{16} \cdot 3 + 4^6 \cdot 1 \cdot 2 \pmod{7} \end{aligned}$$

$$16 = 7 \cdot 2 + 2, \quad 4^6 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$\begin{aligned} 2222^{5555} + 5555^{2222} &\equiv 3^{16} \cdot 3 + 4^6 \cdot 1 \cdot 2 \pmod{7} \equiv (3^2)^7 3^2 \cdot 3 + 2 \pmod{7} \equiv \\ &\equiv 3^5 + 2 \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7} \end{aligned}$$

Aleshores, $2222^{5555} + 5555^{2222}$ és múltiple de 7.

6.- Siga n un enter positiu. Es defineix el n nombre triangular T_n com la suma

$$T_n = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}. \text{ Determineu tots els parells de nombres triangulars}$$

tal que la diferència siga 2008.

Cruz Mathematicorum M330

Solució:

Siga $k > n$

Cerquem els parells, (n, k) tal que $T_k - T_n = 2008$.

$$\frac{k(k+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = 2008.$$

$$k^2 + k - n^2 - n = 4016.$$

$$(k+n)(k-n) + k - n = 4016.$$

$$(k+n+1)(k-n) = 2^4 \cdot 251.$$

Les possibles solucions són les solucions naturals dels següents sistemes:

$$\begin{cases} k+n+1 = 251 \\ k-n = 16 \end{cases}, \text{ la solució és: } \begin{cases} n = 117 \\ k = 133 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k+n+1 = 502 \\ k-n = 8 \end{cases}, \text{ la solució és: } \begin{cases} n = \frac{493}{2} \\ k = \frac{509}{2} \end{cases} \text{ que és una solució racional.}$$

$$\begin{cases} k+n+1 = 1004 \\ k-n = 4 \end{cases}, \text{ la solució és: } \begin{cases} n = \frac{999}{2} \\ k = \frac{1007}{2} \end{cases} \text{ que és una solució racional.}$$

$$\begin{cases} k+n+1 = 2008 \\ k-n = 2 \end{cases}, \text{ la solució és: } \begin{cases} n = \frac{2005}{2} \\ k = \frac{2009}{2} \end{cases} \text{ que és una solució racional.}$$

$$\begin{cases} k+n+1 = 4016 \\ k-n = 1 \end{cases}, \text{ la solució és: } \begin{cases} n = 2007 \\ k = 2008 \end{cases}.$$

$$\text{Per tant, només té 2 solucions, } \begin{cases} n = 117 \\ k = 133 \end{cases}, \begin{cases} n = 2007 \\ k = 2008 \end{cases}.$$

7.- Siga el nombre en base 10, $ab9b_{(10)}$, determineu a i b a fi que

$$ab9b_{(10)} - 5904_{(10)} = b98a_{(10)}.$$

Crux Mathematicorum M326

Solució:

$$0 < a, b \leq 9$$

$$a89b_{(10)} - 5904_{(10)} = b98a_{(10)}.$$

$$a \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + b - 5904 = b \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + a.$$

$$1000(a - b) + b - c = 980 + 5904 - 890$$

$$999(a - b) = 5994. \text{ Simplificant:}$$

$$a - b = 6.$$

Per tant els parells de valors (a,b) són:

$$(7,1), (8,2), (9,3).$$

8.- Demostreu que per a qualsevol nombre enter positiu li restem la suma de cadascuna de les seues xifres elevades a una potència imparella qualsevol (no necessàriament la mateixa), s'obté un múltiple de 3.
CruX Mathematicorum M328.

Solució:

Ho provarem per inducció.

Suposem que el nombre a té una xifra.

Siga $2k+1$, $k \in \mathbb{N}$ un nombre imparell.

$$P = a - a^{2k+1} = a(1 - a^{2k}) = a(1 + a^k)(1 - a^k)$$

Suposem que $k = 3r$, aplicant el teorema de Fermat:

$$a^k = (a^3)^r \equiv 1^r \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}, \text{ aleshores,}$$

$$P = a(1 + a^k)(1 - a^k) \equiv a(1 + 1)(1 - 1) \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3}.$$

Suposem que $k = 3r + 1$, aplicant el teorema de Fermat:

$$a^k = (a^3)^r a \equiv 1^r a \pmod{3} \equiv a \pmod{3}, \text{ aleshores,}$$

$$P = a(1 + a^k)(1 - a^k) \equiv a(a + 1)(a - 1) \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3}. \text{ (producte de 3 nombres naturals consecutius és múltiple de 3.}$$

Suposem que $k = 3r$, aplicant el teorema de Fermat:

$$a^k = (a^3)^r a^2 \equiv 1^r \cdot a \pmod{3} \equiv a \pmod{3}, \text{ aleshores,}$$

$$P = a(1 + a^k)(1 - a^k) \equiv a(a + 1)(a - 1) \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3}. \text{ (producte de 3 nombres naturals consecutius és múltiple de 3.}$$

Per tant P és múltiple de 3.

Suposem que per a qualsevol nombre enter de n xifres s'acompleix la propietat:

$$a = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_{n-1} \cdot 10^{n-1}$$

$$\text{aleshores, } a - \left((a_0)^{2k_0+1} + (a_1)^{2k_1+1} + \dots + (a_{n-1})^{2k_{n-1}+1} \right) \equiv 0 \pmod{3}$$

Vegem que s'acompleix la propietat per a qualsevol nombre natural de $n+1$ xifres:

$$\text{Siga } a = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_n \cdot 10^n.$$

$$a - \left((a_0)^{2k_0+1} + (a_1)^{2k_1+1} + \dots + (a_{n-1})^{2k_{n-1}+1} + (a_n)^{2k_n+1} \right) =$$

$$= a_0 + \dots + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_n \cdot 10^n - \left((a_0)^{2k_0+1} + (a_1)^{2k_1+1} + \dots + (a_{n-1})^{2k_{n-1}+1} + (a_n)^{2k_n+1} \right) =$$

$$= a_0 + \dots + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} - \left((a_0)^{2k_0+1} + (a_1)^{2k_1+1} + \dots + (a_{n-1})^{2k_{n-1}+1} \right) + a_n \cdot 10^n - (a_n)^{2k_n+1} \equiv$$

Aplicant la hipòtesi d'inducció:

$$\equiv 0 + a_n \cdot 10^n - (a_n)^{2k_n+1} \pmod{3} \equiv$$

Notem que $10^n \equiv 1 \pmod{3}$

$$\equiv a_n - (a_n)^{2k_n+1} \pmod{3} \equiv$$

Un nombre d'una xifra compleix la propietat aleshores:

$$\equiv 0 \pmod{3}.$$

9.- Siga n un enter positiu. Es defineix l' n -èsim nombre triangular T_n com la suma

$$T_n = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}. \text{ Determineu totes les parelles de nombres}$$

triangulars la diferència dels quals és 2008.

Crux Mathematicorum M330

Solució:

Siga $k > n$

Cerquem els parells, (n, k) tal que $T_k - T_n = 2008$.

$$\frac{k(k+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = 2008.$$

$$k^2 + k - n^2 - n = 4016.$$

$$(k+n)(k-n) + k - n = 4016.$$

$$(k+n+1)(k-n) = 2^4 \cdot 251.$$

Les possibles solucions són les solucions naturals dels següents sistemes:

$$\begin{cases} k+n+1 = 251 \\ k-n = 16 \end{cases}, \text{ la solució és: } \begin{cases} n = 117 \\ k = 133 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k+n+1 = 502 \\ k-n = 8 \end{cases}, \text{ la solució és: } \begin{cases} n = \frac{493}{2} \\ k = \frac{509}{2} \end{cases} \text{ que és una solució racional.}$$

$$\begin{cases} k+n+1 = 1004 \\ k-n = 4 \end{cases}, \text{ la solució és: } \begin{cases} n = \frac{999}{2} \\ k = \frac{1007}{2} \end{cases} \text{ que és una solució racional.}$$

$$\begin{cases} k+n+1 = 2008 \\ k-n = 2 \end{cases}, \text{ la solució és: } \begin{cases} n = \frac{2005}{2} \\ k = \frac{2009}{2} \end{cases} \text{ que és una solució racional.}$$

$$\begin{cases} k+n+1 = 4016 \\ k-n = 1 \end{cases}, \text{ la solució és: } \begin{cases} n = 2007 \\ k = 2008 \end{cases}.$$

Per tant, només té dues solucions, $\begin{cases} n = 117 \\ k = 133 \end{cases}$, $\begin{cases} n = 2007 \\ k = 2008 \end{cases}$.

10.- Determineu el menor nombre natural m tal que l'equació $533x + 299y = 2000 + m$ tinga solució. Resoleu-la en aquest cas.
Oposicions Aragó 2006.

Solució:

Una equació diofàntica $ax + by = c$ té solució si i només si $d \mid c$ on $d = \text{mcd}(a,b)$.

$$533 = 13 \cdot 41$$

$$299 = 13 \cdot 23$$

$$\text{mcd}(533,299) = 13.$$

L'equació té solució si $13 \mid 2000 + m$

El menor m natural que ho compleix és $m = 2$

$$2000 + m = 13 \cdot 154.$$

Simplifiquem l'equació inicial quan $m = 2$:

$$41x + 23y = 154.$$

Pel algoritme d'Euclides determinem una solució de l'equació: $41x + 23y = 1$

	1	1	3	1	1
41	23	18	5	3	2
18	5	3	2	1	

$$41 = 23 \cdot 1 + 18$$

$$23 = 18 \cdot 1 + 5$$

$$18 = 5 \cdot 3 + 3$$

$$5 = 3 \cdot 1 + 2$$

$$1 = 3 - 2.$$

$1 = 9 \cdot 41 - 16 \cdot 23$, aleshores, una solució de $41x + 23y = 1$ és $\begin{cases} x = 9 \\ y = -16 \end{cases}$.

Per tant una solució de $41x + 23y = 154$ és: $\begin{cases} x = 9 \cdot 154 = 1386 \\ y = -16 \cdot 154 = -2464 \end{cases}$.

Aleshores les solucions de l'equació $41x + 23y = 154$ són:

$$\begin{cases} x = 1386 + 23t \\ y = -2464 - 41t \end{cases} \text{ on } t \in \mathbb{Z}.$$