

Problemes de Nombres 11

1.- tres enters a, b, c estan en progressió geomètrica i $a + b + c = 7$, determineu tots els possibles valors de a, b, c .
Crux Mathematicorum M 33.

Solució:

Siga r la raó de proporcionalitat, $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = r$. Aleshores, $r \in \mathbb{Q}$.

$$b = ar, \quad c = ar^2$$

$$a + b + c = 7, \text{ aleshores, } a + ar + ar^2 = 7.$$

$$a(1 + r + r^2) = 7$$

$$r^2 + r + 1 - \frac{7}{a} = 0. \text{ Resolem l'equació en } r:$$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 + \frac{28}{a}}}{2} \in \mathbb{Q}$$

$$\text{Aleshores, } 3 - \frac{28}{a} = k^2 \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Resolem l'equació en a :

$$a = \frac{28}{k^2 + 3} \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Aleshores, $k^2 + 3$ divideix 28 i $k \in \mathbb{Z}$.

$$k^2 + 3 = 4, \quad k^2 + 3 = 7, \quad k^2 + 3 = 28 \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Aleshores, $k = \pm 1, k = \pm 2, k = \pm 5$.

Si $k = \pm 1, a = 7, r = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$. Les solucions són:

$$a = 7, b = 0, c = 0.$$

$$a = 7, b = -7, c = 7.$$

Si $k = \pm 2, a = 4, r = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$. Les solucions són:

$$a = 4, b = 2, c = 1.$$

$$a = 4, b = -6, c = 9.$$

Si $k = \pm 5, a = 1, r = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$. Les solucions són:

$$a = 1, b = 2, c = 4.$$

$$a = 1, b = -3, c = 9.$$

2.- Sense utilitzar calculadora factoritzeu en factors primers $3^{20} + 3^{19} - 12$.
Crux Mathematicorum M354.

Solució:

$$\begin{aligned}
 3^{20} + 3^{19} - 12 &= 3^{19}(3+1) - 3 \cdot 4 = \\
 &= (3^{19} - 3)2^2 = \\
 &= 2^2 \cdot 3(3^{18} - 1) = \\
 &= 2^2 \cdot 3 \cdot \left((3^3)^3 + 1 \right) \left((3^3)^3 - 1 \right) = \quad (*) \\
 &= 2^2 \cdot 3 \cdot (3^3 + 1) \cdot \left((3^3)^2 - 3^3 + 1 \right) (3^3 - 1) \cdot \left((3^3)^2 + 3^3 + 1 \right) = \\
 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 28 \cdot 703 \cdot 26 \cdot 757 = \\
 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 757 = \\
 &= 2^5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 757
 \end{aligned}$$

Nota (*) $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$. $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$.

3.- Quants enters de la llista $1, 2008, 2008^2, \dots, 2008^{2009}$ són a la vegada quadrats perfectes i cubs perfectes?
Crux Mathematicorum M358

Solució:

$$1 = 2008^0, 2008, 2008^2, \dots, 2008^{2009}$$

$2008 = 2^3 \cdot 2512$, que no és un quadrat ni un cub perfecte.

A fi que un nombre de la llista siga quadrat perfecte l'exponent ha de ser múltiple de 2.

A fi que un nombre de la llista siga cub perfecte l'exponent ha de ser múltiple de 3.

Aleshores, per a que siga quadrat i cub perfecte ha de ser múltiple de 6.

Els exponents són $0, 1, 2, \dots, 2009$.

El darrer múltiple de 6 és 2004.

Considerem la successió de múltiples de 6: $0, 6, 12, \dots, 2004$.

Siga n el total de termes:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \text{ on } d = 6$$

$$2004 = 0 + (n-1)6. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$n = 335.$$

Aleshores, hi ha 335 nombres de la llista que són quadrats i cubs perfectes a la vegada.

4.- Determineu tots els enters positius que satisfan $3^x = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.
Crux Mathematicorum M360.

Solució:

Siga $x \in \mathbb{N}$.

$$3^x - 1 = x^3 + 3x^2 + 2x.$$

Factoritzant el polinomi:

$$3^x - 1 = x(x+1)(x+2).$$

Utilitzant congruències mòdul 3:

$$3^x - 1 \equiv -1 \pmod{3}.$$

$$x(x+1)(x+2) \equiv 0 \pmod{3}.$$

Aleshores, l'equació no té solució en els enters positius.

5.- Calculeu la suma:

$$\frac{19}{105} + \frac{13}{315} + \frac{67}{3465} + \dots + \frac{4n^2 + 16n + 19}{16n^4 + 128n^3 + 344n^2 + 352n + 105} + \dots$$

Revista OIM. Problema 159.

Solució:

Factoritzant el denominador:

$$16n^4 + 128n^3 + 344n^2 + 352n + 105 = (2n + 1)(2n + 3)(2n + 5)(2n + 7)$$

$$\frac{4n^2 + 16n + 19}{16n^4 + 128n^3 + 344n^2 + 352n + 105} = \frac{a}{2n + 1} + \frac{b}{2n + 3} + \frac{c}{2n + 5} + \frac{d}{2n + 7}$$

$$4n^2 + 16n + 19 = a(2n + 3)(2n + 5)(2n + 7) + b(2n + 1)(2n + 5)(2n + 7) + c(2n + 1)(2n + 3)(2n + 7) + d(2n + 1)(2n + 3)(2n + 7)$$

$$4n^2 + 16n + 19 = 8(a + b + c + d)n^3 + 4(15a + 13b + 11c + 9d)n^2 + 2(71a + 47b + 31c + 23d)n + 105a + 35b + 21c + 15d$$

Igualant coeficients:

$$\begin{cases} 8(a + b + c + d) = 0 \\ 4 = 4(15a + 13b + 11c + 9d) \\ 16 = 2(71a + 47b + 31c + 23d) \\ 19 = 105a + 35b + 21c + 15d \end{cases}$$

Resolent el sistema:

$$\left\{ a = \frac{1}{4}, b = \frac{-1}{4}, c = \frac{1}{4}, d = \frac{-1}{4} \right\}.$$

$$\frac{19}{105} + \dots + \frac{4n^2 + 16n + 19}{16n^4 + 128n^3 + 344n^2 + 352n + 105} + \dots = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n + 1} + \frac{-1}{2n + 3} + \frac{1}{2n + 5} + \frac{-1}{2n + 7}$$

Sumen les n+1 primers sumands de l'anterior suma:

$$\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right)$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right)$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right)$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} \right)$$

.....
.....

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n + 1} + \frac{-1}{2n + 3} + \frac{1}{2n + 5} + \frac{-1}{2n + 7} \right)$$

$$\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n + 3} - \frac{1}{2n + 7} \right)$$

Aleshores:

$$\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n + 1} + \frac{-1}{2n + 3} + \frac{1}{2n + 5} + \frac{-1}{2n + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n + 3} - \frac{1}{2n + 7} \right) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{5} - 0 - 0 \right) = \frac{3}{10}$$

6.- Siguen a, b, c, d enters tals que $a + b + c + d = 0$. Proveu que $a^5 + b^5 + c^5 + d^5$ és divisible per 30.

Mathematical Reflections J97.

Solució:

Petit teorema de Fermat

Siga p un nombre primer, aleshores $a^p \equiv a \pmod{p} \quad \forall a \in \mathbb{Z}$.

Vegem que $a^5 + b^5 + c^5 + d^5$ és divisible per 2, 3, i 5, aleshores serà divisible pel mínim comú divisor de tots tres que és 30.

Aplicant el petit teorema de Fermat:

$$a^5 \equiv a^2 a^2 a \pmod{2} \equiv a a a \pmod{2} \equiv a^2 a \pmod{2} \equiv a a \pmod{2} \equiv a \pmod{2}.$$

Aleshores:

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 \equiv (a + b + c + d) \pmod{2} = 0 \pmod{2}.$$

Per tant, $a^5 + b^5 + c^5 + d^5$ és divisible per 2.

$$a^5 \equiv a^3 a^2 \pmod{3} \equiv a a^2 \pmod{3} \equiv a^3 \pmod{3} \equiv a \pmod{3}.$$

Aleshores:

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 \equiv (a + b + c + d) \pmod{3} = 0 \pmod{3}.$$

Per tant, $a^5 + b^5 + c^5 + d^5$ és divisible per 3.

$$a^5 \equiv a \pmod{5}.$$

Aleshores:

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 \equiv (a + b + c + d) \pmod{5} = 0 \pmod{5}.$$

Per tant, $a^5 + b^5 + c^5 + d^5$ és divisible per 5.

Aleshores, $a^5 + b^5 + c^5 + d^5$ és divisible per 30.

7.- Els nombres a, b, c, d, e, f, g , són set enters positius consecutius tals que $a + b + c + d + e + f + g$ és un cub perfecte i $b + c + d + e + f$ és un quadrat perfecte. Proveu que hi ha infinites solucions per al primer a . Ordenant-les de menor a major les solucions quina és la segona?
Concurs Puig Adam XXIV.

Solució:

$$a + b + c + d + e + f + g = a + a + 1 + a + 2 + a + 3 + a + 4 + a + 5 + a + 6 = 7a + 21 = 7(a + 3).$$

Com $a + b + c + d + e + f + g$ és un cub perfecte, aleshores:

$$7(a + 3) = n^3$$

$$\text{Aleshores, } a + 3 = 7^2 r^3.$$

$$b + c + d + e + f = a + 1 + a + 2 + a + 3 + a + 4 + a + 5 = 5a + 15 = 5(a + 3)$$

Com $b + c + d + e + f$ és un quadrat perfecte, aleshores:

$$\text{Aleshores, } a + 3 = 5s^2.$$

Les solucions del primer a són:

$$a + 3 = 7^2 \cdot 5^3 \cdot m^6, \text{ on } m \in \mathbb{N}.$$

$$a = 7^2 \cdot 5^3 \cdot m^6 - 3, \text{ on } m \in \mathbb{N}.$$

El segon valor a és:

$$a = 7^2 \cdot 5^3 \cdot 2^6 - 3 = 392000 - 3 = 391997.$$

8.- Calculeu:

$$\binom{2008}{3} - 2\binom{2008}{4} + 3\binom{2008}{5} - 4\binom{2008}{6} + \dots - 2004\binom{2008}{2006} + 2005\binom{2008}{2007}$$

Mathematical Refleitions J102

Solució:

Utilitzant la propietat $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$:

$$\begin{aligned} S &= \binom{2008}{3} - 2\binom{2008}{4} + 3\binom{2008}{5} - 4\binom{2008}{6} + \dots - 2004\binom{2008}{2006} + 2005\binom{2008}{2007} = \\ &= \binom{2007}{2} + \binom{2007}{3} - 2\left(\binom{2007}{3} + \binom{2007}{4}\right) + 3\left(\binom{2007}{4} + \binom{2007}{5}\right) - 4\left(\binom{2007}{5} + \binom{2007}{6}\right) + \dots + \\ &+ \dots - 2004\left(\binom{2007}{2005} + \binom{2007}{2006}\right) + 2005\left(\binom{2007}{2006} + \binom{2007}{2007}\right) = \\ &= \binom{2007}{2} - \binom{2007}{3} + \binom{2007}{4} - \binom{2007}{5} + \dots - \binom{2007}{2005} + \binom{2007}{2006} + 2005\binom{2007}{2007} \end{aligned}$$

$$0 = (1-1)^{2007} = \binom{2007}{0} - \binom{2007}{1} + \binom{2007}{2} - \binom{2007}{3} + \dots - \binom{2007}{2005} + \binom{2007}{2006} - \binom{2007}{2007}$$

Aleshores,

$$\binom{2007}{2} - \binom{2007}{3} + \dots - \binom{2007}{2005} + \binom{2007}{2006} = -\binom{2007}{0} + \binom{2007}{1} + \binom{2007}{2007} = 2006.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} S &= \binom{2007}{2} - \binom{2007}{3} + \binom{2007}{4} - \binom{2007}{5} + \dots - \binom{2007}{2005} + \binom{2007}{2006} + 2005\binom{2007}{2007} = \\ &= 2006 + 2006\binom{2007}{2007} = 4012. \end{aligned}$$

9.- Siga A un enter positiu de sis xifres i B l'enter positiu format per les xifres de A en ordre invers.

Demostreu que A-B és múltiple de 9.

Crux Mathematicorum M363.

Solució:

Nota 1:

$$x^{2n+1} - y^{2n+1} = (x + y)(x^{2n} + x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 + \dots + xy^{2n-1} + y^{2n})$$

$$\text{Siga } A = abcdef_{(10)} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + f.$$

$$B = fedcba_{(10)} = f \cdot 10^5 + e \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a.$$

$$A - B = (a - f)(10^5 - 1) + (b - e)(10^4 - 10) + (c - d)(10^3 - 10^2).$$

$$A - B = (a - f)(10^5 - 1) + (b - e)10(10^3 - 1) + (c - d)10^2(10 - 1).$$

Aplicant la nota 1:

$$A - B = (a - f)(10 - 1)(10^4 10^3 + 10^2 + 10 + 1) + (b - e)10(10 - 1)(10^2 + 10 + 1) + (c - d)10^2 \cdot 9$$

$$A - B = 9((a - f)(10^4 10^3 + 10^2 + 10 + 1) + (b - e)10(10^2 + 10 + 1) + (c - d)10^2)$$

Per tant, A-B és múltiple de 9.

10.- Proveu que l'equació $3^m + 3^n + 1 = t^2$ no té solució en els enters positius.
Eureka 28

Solució:

$$m, n, t \geq 1$$

3^k és un nombre imparell aleshores, $3^m + 3^n + 1$ és imparell.

Aleshores, t^2 és imparell per tant, t és imparell.

Aleshores, $t = 2r + 1$

$$3^m + 3^n + 1 = (2r + 1)^2$$

$$3^m + 3^n + 1 = 4r^2 + 4r + 1, \text{ simplificant:}$$

$$3^m + 3^n = 4r(r + 1).$$

$r(r + 1)$ és múltiple de 2, per tant,

$4r(r + 1)$ és múltiple de 8.

Aleshores, $3^m + 3^n$ és múltiple de 8.

Aleshores, $3^m + 3^n \equiv 0 \pmod{8}$

$$3^{2k} \equiv 9^k \pmod{8} = 1 \pmod{8}.$$

$$3^{2k+1} \equiv 9^k \cdot 3 \pmod{8} = 1 \cdot 3 \pmod{8} = 3 \pmod{8}.$$

Aleshores:

$$3^k \equiv 1 \pmod{8} \text{ o bé } 3^k \equiv 3 \pmod{8}.$$

Aleshores,

$$3^m + 3^n \equiv 2 \pmod{8}, \text{ o bé } 3^m + 3^n \equiv 4 \pmod{8}, \text{ o bé } 3^m + 3^n \equiv 6 \pmod{8}$$

La qual cosa és un absurd.