Problemes Nombres 12

1.- Determineu tots els enters positius n per als quals existeixen enters positius x, y tals que compleixen les dues igualtats $x+y=n^2$, $10x+y=n^3$.
Duel Matemàtic R. Txeca, Polònia, Àustria, 2008.

Solució:

Resolem el sistema $\begin{cases} x+y=n^2 \\ 10x+y=n^3 \end{cases}$ la solució és:

$$\begin{cases} x=n^2\left(\dfrac{n-1}{9}\right) \\ y=n^2\left(\dfrac{10-n}{9}\right) \end{cases}$$

$x,y\in N$ aleshores, $n-1>0$, 9 divideix a $n^2(n-1)$, $10-n>0$, i 9 divideix a $n^2(10-n)$.

$1<n<10$ i 9 $n^2(n-1)$ i $n^2(10-n)$.

Les solucions són:

$n=3,6,9$.

2.- Determineu la successió aritmètica formada per 9 enters positius de tal forma que la suma estiga entre 200 i 220, i el segon terme val 12.
Crux Mathematicorum M377.

Solució.

Siga la progressió aritmètica que cerquem, $\{12+d(n-2)\}_{n=1}^{9}$.
El segon terme és 12 i la diferència és d, $d\in Z$.
Com els nou termes són enters positius, $12-d>0$, y $12+7d>0$.
Per tant, $d\leq 11$, $d\geq -1$.

La suma dels 9 termes és:
$$S_9=\frac{12-d+12+7d}{2}9=(12+3d)9.$$
Per hipòtesi, $200\leq S_9\leq 220$.
$$200\leq 108+27d\leq 220$$
$$\frac{92}{27}\leq d\leq \frac{112}{27},\ d\in Z$$
$$4\leq d\leq 4.$$
Aleshores, $d=4$.
Per tant la progressió que cerquem és $\{12+4(n-2)\}_{n=1}^{9}$ i la suma dels nou termes és 216.

3.- Els enters $27+C$, $555+C$, $1371+C$ són tots quadrats perfectes i les seues arrels formen una progressió aritmètica. Determineu tots els valors possibles de C.
Crux Mathematicorum M379

Solució:

Siguen $27+C=p^2$, $555+C=(p+d)^2$, $1371+C=(p+2d)^2$, on $p,d\in Z$.
Aquests nombres compleixen les hipòtesis de l'enunciat.

$$\begin{cases} 27+C=p^2 \\ 555+C=p^2+d^2+2pd \\ 1371+C=p^2+4d^2+4pd \end{cases}$$

Restant la segona menys la primera i la tercera menys la primera:

$$\begin{cases} d^2+2pd=528 \\ 4d^2+4pd=1344 \end{cases}.$$

Les solucions del sistema són: $\begin{cases} d=12 \\ p=16 \end{cases}$, $\begin{cases} d=-12 \\ p=-16 \end{cases}$.

En qualsevol de les dues solucions substituint en la primera equació:

$27+C=16^2$.

Per tant, $C=16^2-27=229$.

4.- Determineu totes les successions finites de n nombres naturals consecutius $a_1, a_2, \ldots, a_n$, amb $n \geq 3$, tals que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2009$.
Olimpíada espanyola 2009.

Solució:
El terme general de la successió és $a_n = a_1 + n - 1$.
La suma del n termes és:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + n - 1}{2} n.$$

$$\frac{2a_1 + n - 1}{2} n = 2009$$

$$(2a_1 + n - 1)n = 4018 = 2 \cdot 41 \cdot 7^2.$$

Notem que $2a_1 + n - 1 > n$ i els dos nombres naturals.
Aleshores les solucions són

$n = 7$, $(2a_1 + 6)7 = 4018$. Resolent l'equació: $a_1 = 284$.

$n = 14$, $(2a_1 + 13)14 = 4018$. Resolent l'equació: $a_1 = 137$.

$n = 41$, $(2a_1 + 40)41 = 4018$. Resolent l'equació: $a_1 = 39$.

$n = 49$, $(2a_1 + 48)49 = 4018$. Resolent l'equació: $a_1 = 17$.

5.- En base 10 un nombre natural $N=1....114....44$ comença amb 2009 xifres 1 consecutives, seguides de 4018 xifres 4 consecutives. Demostreu que N no és un quadrat perfecte.
Crux Mathematicorum M385.

Solució

Siga $a=1......\overset{(2009}{}.....1=1+10+10^2+.....+10^{2008}$.
Aleshores:
$N=a\cdot 10^{4018}+4a\cdot 10^{2009}+4a$.
$N=a\cdot\left(10^{4018}+4\cdot 10^{2009}+4\right)$.
$N=a\cdot\left(10^{2009}+2\right)^2$.
Vegem que a no és un quadrat perfecte.
Si un nombre és un quadrat perfecte i la xifra de les unitats és 1, la seua arrel quadrada acaba amb 1, o 9.

Vegem que si un nombre la xifra de les unitats és 1 en elevar-lo al quadrat la xifra de las desenes no pot ser 1.
Siga $x=p\cdot 10^2+q\cdot 10+1$, $0\leq q\leq 9$ un nombre tal que la xifra de les unitats és 1.
$x^2=p^2+10^4+2pq\cdot 10^3+(2p+q^2)10^2+2q\cdot 10+1$.
La xifra de les desenes és parella.

Vegem que si un nombre la xifra de les unitats és 9 en elevar-lo al quadrat la xifra de las desenes no pot ser 1.
Siga $x=p\cdot 10^2+q\cdot 10+9$, $0\leq q\leq 9$ un nombre tal que la xifra de les unitats és 9.
$x^2=p^2+10^4+2pq\cdot 10^3+(18p+q^2)10^2+(18q+8)\cdot 10+1$.
La xifra de les desenes és parella.

Per tant a no és un quadrat perfecte. Per tant N no és un quadrat perfecte.

6.- Es forma una successió escrivint en ordre creixent, per a cada enter n, els múltiples de n compresos entre n i n^2. La successió comença així:
1, 2, 4, 3, 6, 9, 4, 8, 12, 16, 5, 10, 15, 20, 25, 6, 12,…....
Determineu el terme 2009 de la successió.
Crux Mathematicorum M388

Solució:

La successió és:
$1\cdot 1, 2\cdot 1, 2\cdot 2, 3\cdot 1, 3\cdot 2, 3\cdot 3, 4\cdot 1, 4\cdot 2, 4\cdot 3, 4\cdot 4, \ldots\ldots\ldots\ldots$

$1+2+3+\ldots..+62=\frac{1+62}{2}62=1953$.
Aleshores el número que ocupa el lloc 1953 és $62\cdot 62$.
El que ocupa el lloc 1954 és $63\cdot 1$.
El que ocupa el lloc 1955 és $63\cdot 2$.
El que ocupa el lloc 2009 és $63\cdot 56=3528$.

7.- Determineu els parells (a, b) de nombres enters positius pels quals $\frac{a+1}{b}$ i $\frac{b+2}{a}$ són enters positius.
Crux Mathematicorum M391

Solució

$\frac{a+1}{b} \in N$, aleshores, $b \leq a+1$ (1)
$\frac{b+2}{a} \in N$, aleshores, $a \leq b+2$ (2)
De les expressions (1) (2):
$a-2 \leq b \leq a+1, \quad a, b \in N$
Aleshores, $b = a-2$, $b = a-1$, $b = a$, o bé, $b = a+1$.

Suposem $b = a-2$,
$\frac{a+1}{a-2} = 1 + \frac{3}{a-2} \in N$. Aleshores, $a = 3$ o bé $a = 5$
Les solucions són: $\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$.

Suposem que $b = a-1$.
$\frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1} \in N$, $\frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a} \in N$
Aquest nombres no poden ser naturals.

Suposem que $b = a$.
$\frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a} \in N$ $\frac{a+2}{a} = 1 + \frac{2}{a} \in N$. Aleshores, $a = 1$.
La solució és $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$.

Suposem que $b = a+1$.
$\frac{a+3}{a} = 1 + \frac{3}{a} \in N$. Aleshores, $a = 1$ o bé $a = 3$.
Les solucions són: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$.

8.-
2009 estudiant tenen cadascun una carta amb un nombre enter positiu diferent. La suma d'aquestes cartes és 2020049. Quins valors possibles per a la mediana dels nombres de les cartes.
Crux Mathematicorum M389.

Solució:
Siguen $\{a_i\}_{i=1}^{2009}$ el nombres de les cartes, ordenats de forma creixent, $a_i < a_{i+1}$
$i = 1,2,...,2008$ tal que

$$\sum_{i=1}^{2009} a_i = 2020049 .$$

Ordenats tots els $\{a_i\}_{i=1}^{2009}$ de menor a major la mediana és el terme que ocupa el lloc 1005.

El menor valor per a què la mediana (com totes les cartes tenen distint nombre) és la successió tal que els primers 1005 nombres són els primers nombres naturals.
Aleshores la mediana és 1005.

Notem que $\sum_{i=1}^{1004} i = \frac{1+1004}{2} 1004 = 504510$.

La successió que té per mediana el major valor els primers 1004 valors són els primers nombres naturals.

$$\sum_{i=1005}^{2009} a_i = 2020049 - 504510 = 1515539$$

Suposem que $a_{1005} > 1005$.

$a_{i+1} > a_i$, com tots els nombres són distints, $a_i \geq i+1$.

$$\sum_{i=1005}^{2009} a_i \geq \sum_{i=1005}^{2009} (i+1) = \frac{1006+2010}{2} 1005 = 1515540 .$$

La qual cosa és absurda.
Aleshores, $a_{1005} = 1005$.

Per tant en qualsevol cas la mediana és 1005.

9.- Determineu les solucions enteres de l'equació:
$a^b b^a + a^b + b^a = 89$.
Crux Mathematicorum M402.

Solució:
Notem que $a, b \neq 0$.
Ja que si $a = 0$, tindríem que $0^b b^0 + 0^b + b^0 = 89$, d'on $1 = 89$.

$a^b b^a + a^b + b^a = 89$.
$a^b(b^a + 1) + b^a + 1 = 90$.
$(a^b + 1)(b^a + 1) = 90$. Per tant, $a^b + 1 \in Z \sim \{0\}$, $b^a + 1 \in Z \sim \{0\}$
Aleshores, $a^b + 1$, $b^a + 1$ són del mateix signe.

Suposem que $a^b + 1 < 0$ i $b^a + 1 < 0$
De la primera igualtat:
$a^b < -1$, aleshores, $a \leq -1$
Per tant, $b^a \in Q \sim Z$, $b^a + 1 \in Z \sim \{0\}$, la qual cosa és absurda.

Per tant, $a^b + 1 > 0$ i $b^a + 1 > 0$.
Les possibilitats dels factors són:
$\begin{cases} a^b + 1 = 2 \\ b^a + 1 = 45 \end{cases}$, $\begin{cases} a^b = 1 \\ b^a = 44 \end{cases}$, la solució del qual és $\begin{cases} a = 1 \\ b = 44 \end{cases}$.
$\begin{cases} a^b + 1 = 45 \\ b^a + 1 = 2 \end{cases}$, la solució del qual és $\begin{cases} a = 44 \\ b = 1 \end{cases}$.

$\begin{cases} a^b + 1 = 3 \\ b^a + 1 = 30 \end{cases}$, $\begin{cases} a^b = 2 \\ b^a = 29 \end{cases}$ que no té solució.
$\begin{cases} a^b + 1 = 30 \\ b^a + 1 = 3 \end{cases}$ no té solució.

$\begin{cases} a^b + 1 = 5 \\ b^a + 1 = 18 \end{cases}$, $\begin{cases} a^b = 4 \\ b^a = 18 \end{cases}$ que no té solució.
$\begin{cases} a^b + 1 = 18 \\ b^a + 1 = 5 \end{cases}$ no té solució.

$\begin{cases} a^b + 1 = 6 \\ b^a + 1 = 15 \end{cases}$, $\begin{cases} a^b = 5 \\ b^a = 14 \end{cases}$ que no té solució.
$\begin{cases} a^b + 1 = 15 \\ b^a + 1 = 6 \end{cases}$ no té solució.

$\begin{cases} a^b + 1 = 9 \\ b^a + 1 = 10 \end{cases}$, $\begin{cases} a^b = 8 \\ b^a = 9 \end{cases}$, la solució del qual és $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$.

$\begin{cases} a^b + 1 = 10 \\ b^a + 1 = 9 \end{cases}$, la solució del qual és $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$.

Per tant, les solucions enteres de l'equació són:

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 44 \end{cases}$, $\begin{cases} a = 44 \\ b = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$.

10.- Determineu una fórmula que done el valor de la suma
$S = 17 + 187 + 1887 + 18887 + ... + 188....87$
on el darrer terme conté exactament n xifres 8.
Crux Mathematicorum M405.

Solució:

Siga $S = 17 + 187 + 1887 + 18887 + ... + 188....87$
$S = 10 + 10^2 + ... + 10^{n+1} + 7(n+1) + 80(1 + 11 + ... + 1.......1)$

$$10 + 10^2 + ... + 10^{n+1} = \frac{10 - 10^{n+2}}{1 - 10} = \frac{10}{9}\left(10^{n+1} - 1\right).$$

Siga $T = 1 + 11 + 111.... + 1.......1$.
$10T = 10 + 110 + 1110 + ... + 1......10$.
Restant les dues expressions:
$$-9T = 1 + \left(1 + 1 + \overset{(n-1}{..........} + 1\right) - \left(10 + ... + 10^n\right).$$
$$-9T = n - \frac{10 - 10^{n+1}}{1 - 10}.$$
$$-9T = n + \frac{10}{9}(1 - 10^n).$$
$$T = \frac{-n}{9} + \frac{10}{9^2}(10^n - 1).$$

Aleshores:
$$S = \frac{10}{9}\left(10^{n+1} - 1\right) + 7(n+1) + 80\left(\frac{-n}{9} + \frac{10}{9^2}\left(10^n - 1\right)\right).$$