

Problemes de Nombres 13

1.- Els nombres a , b , c , d i e són cinc enters consecutius. Demostreu que la diferència entre la mitjana dels quadrats de c i e i la dels quadrats de a i c és igual a quatre vegades c .

Crux Mathematicorum M394

Solució:

Siga $a = c - 2$, $b = c - 1$, c , $d = c + 1$, $e = c + 2$, cinc enters consecutius.

$$\begin{aligned} \frac{c^2 + e^2}{2} - \frac{a^2 + c^2}{2} &= \frac{c^2 + (c+2)^2}{2} - \frac{(c-2)^2 + c^2}{2} = \\ &= \frac{2c^2 + 4c + 4}{2} - \frac{2c^2 - 4c + 4}{2} = \\ &= 4c. \end{aligned}$$

2.- Determineu tots els parells (x,y) d'enters tals que
 $x^4 - x + 1 = y^2$.

Crux Mathematicorum M397

Solució:

Si $x = 0$ aleshores $y = 1, -1$. Per tant $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ són solucions.

Si $x = 1$ aleshores $y = 1, -1$. Per tant $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ són solucions.

Si $x = -1$ aleshores $y = \sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$.

$x^4 - x + 1$ es imparell per a tot $x \in \mathbb{Z}$. Aleshores $y = 0$ no es solució.

Si $y = 1$ aleshores $x = 0, 1$, per tant $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ són solucions.

Si $y = -1$ aleshores $x = 0, 1$, per tant $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ són solucions.

$$x^4 - y^2 = x - 1.$$

$$(x^2 + y)(x^2 - y) = x - 1.$$

Suposem que $x > 1$, $y > 1$ és solució.

$$x - 1 > 0, x^2 + y > 0.$$

$$x^2 + y \text{ divideix a } x - 1, \text{ per tant, } x^2 + y \leq x - 1.$$

$x^2 - x + 1 + y \leq 0$, la qual cosa és falsa ja que $f(x) = x^2 - x + 1 + y$ és una paràbola còncaua i el discriminant és negatiu $\Delta = 1 - 4(y + 1) < 0$.

Suposem $x > 1$, $y < -1$ és solució.

$$x - 1 > 0, x^2 - y > 0.$$

$$x^2 - y \text{ divideix a } x - 1, \text{ per tant, } x^2 - y \leq x - 1.$$

$x^2 - x + 1 - y \leq 0$, la qual cosa és falsa ja que $f(x) = x^2 - x + 1 - y$ és una paràbola còncaua el discriminant és negatiu $\Delta = 1 - 4(y - 1) < 0$.

Suposem $x < -1$, $y > 1$ és solució.

$$x - 1 < 0, 1 - x > 0, x^2 + y > 0.$$

$$x^2 + y \text{ divideix a } 1 - x, \text{ per tant, } x^2 + y \leq 1 - x.$$

$x^2 + x - 1 + y \leq 0$, la qual cosa és falsa ja que $f(x) = x^2 + x - 1 + y$ és una paràbola còncaua el discriminant és negatiu $\Delta = 1 - 4(y - 1) < 0$.

Suposem $x < -1$, $y < -1$ és solució.

$$x - 1 < 0, 1 - x > 0, x^2 - y > 0.$$

$$x^2 - y \text{ divideix a } 1 - x, \text{ per tant, } x^2 - y \leq 1 - x.$$

$x^2 + x - 1 - y \leq 0$, la qual cosa és falsa ja que $f(x) = x^2 + x - 1 - y$ és una paràbola còncaua el discriminant és negatiu $\Delta = 1 - 4(-y - 1) < 0$.

Per tant les solucions enteres de l'equació són:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

3.- Determineu les ternes (a,b,c) d'enters positius tal que $\frac{3ab-1}{abc+1}$ siga un enter positiu.

Crux Mathematicorum M399.

Solució:

$3ab-1 > 0$, $abc+1 > 0$, $\frac{3ab-1}{abc+1} \in \mathbb{N}$, aleshores:

$$3ab-1 \geq abc+1$$

$$ab(3-c) \geq 2.$$

Per tant, $3-c > 0$, aleshores, $c < 3$, $c \in \mathbb{N}$.

Aleshores $c = 1, 2$

Suposem que $c = 1$

$$\frac{3ab-1}{abc+1} = \frac{3ab-1}{ab+1} = n \in \mathbb{N}$$

Aleshores, $3ab-1 = nab+n$.

$$(3-n)ab = n+1.$$

$$ab = \frac{n+1}{3-n} \in \mathbb{N}. \text{ Per tant, } n < 3.$$

Si $n = 1$, aleshores, $ab = \frac{1+1}{3-1} = 1$, per tant, $a = b = 1$.

$$\text{La solució és } \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Si $n = 2$, aleshores, $ab = \frac{2+1}{3-2} = 3$, per tant, $a = 1, b = 3$ o bé $a = 3, b = 1$

$$\text{Les solucions són } \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}, \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}.$$

Suposem que $c = 2$

$$\frac{3ab-1}{abc+1} = \frac{3ab-1}{2ab+1} = n \in \mathbb{N}$$

Aleshores, $3ab-1 = 2nab+n$.

$$(3-2n)ab = n+1.$$

$$ab = \frac{n+1}{3-2n} \in \mathbb{N}. \text{ Per tant, } n < \frac{3}{2}. \text{ Aleshores } n = 1. \text{ Aleshores:}$$

$$ab = \frac{1+1}{3-2} = 2, \text{ per tant, } a = 1, b = 2 \text{ o bé } a = 2, b = 1$$

$$\text{Les solucions són } \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}, \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Per tant el problema té 5 solucions:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}, \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}, \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}, \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}, \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}.$$

4.- Demostreu que hi ha infinits enters positius imparells n per als quals el nombre $2^n + n$ és un nombre compost (és a dir, no és primer)
Pretorneo internacional de las Ciudades. OMA 2000.

Solució

Siga el conjunt $n = 6k + 1$ per a $k \in \mathbb{N}$, és un conjunt infinit de nombres imparells.

$$2^{6k+1} + 6k + 1 > 3.$$

Vegem que aquest nombre és múltiple de 3.

$$2^{6k+1} + 6k + 1 \equiv 2 \cdot (2^{3k})^2 + 6k + 1 \pmod{3}$$

aplicant el petit teorema de Fermat:

Siga p un nombre primer i a un natural tal que p no divideix a a , aleshores:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

$$(2^{3k})^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$6k \equiv 0 \pmod{3}$$

Aleshores,

$$2^{6k+1} + 6k + 1 \equiv 2 \cdot (2^{3k})^2 + 6k + 1 \pmod{3} \equiv 2 \cdot 1 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

Aleshores,

$$2^{6k+1} + 6k + 1 = 3 \cdot q, \quad q \in \mathbb{N}, \quad q > 1.$$

Per tant, és un nombre compost.

5.- Considerem la llista de naturals, ordenada en orde creixent, que poden ser expressats com la suma de 21 nombres enters consecutius (no necessàriament positius).

Determineu el que ocupa la posició 21ena d'aquesta llista.

Crux Mathematicorum M414.

Solució:

Siga $n \in \mathbb{N}$ un dels nombres números d'aquest conjunt:

$$n = a + (a + 1) + (a + 2) + \dots + (a + 20), \quad a \in \mathbb{Z}.$$

$$n = 21a + 1 + 2 + 3 + \dots + 20.$$

$$n = 21a + \frac{(1 + 20)20}{2}.$$

$$n = 21a + 210.$$

$$n - 21a = 210.$$

Considerem l'equació diofàntica:

$$n - 21a = 1$$

Una solució de l'equació és $\begin{cases} n = 1 \\ a = 0 \end{cases}$.

La solució de l'equació diofàntica $n - 21a = 210$ és:

$$\begin{cases} n = 1 \cdot 210 + 21t \\ a = 0 \cdot 210 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

$$\begin{cases} n = 210 + 21t \\ a = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Com n és natural $210 + 21t > 0$.

$$t > -10.$$

$$t \geq -9.$$

El primer s'assoleix quan $t = -9$.

El que ocupa el lloc 21 s'assoleix quan $t = 11$.

$$n = 210 + 21 \cdot 11 = 21^2 = 441.$$

6.- Demostreu que $10^n + 3(4^{n+2}) + 5$ és divisible per 9 per a tot enter no negatiu.

Crux Mathematicorum M416

Solució:

Demostrem la proposició pel mètode d'inducció.

Si $n = 0$.

$$10^0 + 3 \cdot 4^2 + 5 \equiv 54 \pmod{9} \equiv 0 \pmod{9}.$$

Suposem que per a $n = k$ la proposició és certa:

$$10^k + 3(4^{k+2}) + 5 \equiv 0 \pmod{9}.$$

$$10^k + 5 \equiv 6 \pmod{9}.$$

$$\text{Aleshores } 3(4^{k+2}) \equiv -6 \pmod{9} \equiv 3 \pmod{9} \quad (1)$$

Vegem que la proposició s'acompleix per a $n = k + 1$.

$$10^{k+1} + 3(4^{k+1+2}) + 5 \equiv 10^{k+1} + 5 + 4 \cdot 3 \cdot 4^{k+3} \pmod{9}.$$

$$10^{k+1} + 5 \equiv 6 \pmod{9}.$$

Aplicant la hipòtesi d'inducció (1):

$$10^{k+1} + 3(4^{k+1+2}) + 5 \equiv 6 + 4 \cdot 3 \pmod{9} \equiv 0 \pmod{9}.$$

Aleshores $10^n + 3(4^{n+2}) + 5$ és divisible per 9 per a tot enter no negatiu.

7.- Determineu tot els nombres naturals n que verifiquen la condició:

$$\left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{2n}{3} \right] = n + 335, \text{ on } [x] = \text{part entera de } x.$$

Olimpiada Espanyola, 2010. Fase local.

Solució:

Tots els nombres naturals són de la forma $6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4, 6k + 5$.

$$\text{Si } n = 6k, \left[\frac{n}{2} \right] = [3k] = 3k, \left[\frac{2n}{3} \right] = [4k] = 4k.$$

$$3k + 4k = 6k + 335.$$

Resolent l'equació; $k = 335$, aleshores, $n = 6k = 2010$.

$$\text{Si } n = 6k + 1, \left[\frac{n}{2} \right] = \left[3k + \frac{1}{2} \right] = 3k, \left[\frac{2n}{3} \right] = \left[4k + \frac{2}{3} \right] = 4k.$$

$$3k + 4k = 6k + 1 + 335.$$

Resolent l'equació; $k = 336$, aleshores, $n = 6k + 1 = 2017$.

$$\text{Si } n = 6k + 2, \left[\frac{n}{2} \right] = [3k + 1] = 3k + 1, \left[\frac{2n}{3} \right] = \left[4k + \frac{4}{3} \right] = 4k + 1.$$

$$3k + 4k + 2 = 6k + 2 + 335.$$

Resolent l'equació; $k = 335$, aleshores, $n = 6k + 2 = 2012$.

$$\text{Si } n = 6k + 3, \left[\frac{n}{2} \right] = \left[3k + \frac{3}{2} \right] = 3k + 1, \left[\frac{2n}{3} \right] = [4k + 2] = 4k + 2.$$

$$3k + 4k + 3 = 6k + 3 + 335.$$

Resolent l'equació; $k = 335$, aleshores, $n = 6k + 3 = 2013$.

$$\text{Si } n = 6k + 4, \left[\frac{n}{2} \right] = [3k + 2] = 3k + 2, \left[\frac{2n}{3} \right] = \left[4k + \frac{8}{3} \right] = 4k + 2.$$

$$3k + 4k + 4 = 6k + 4 + 335.$$

Resolent l'equació; $k = 335$, aleshores, $n = 6k + 4 = 2014$.

$$\text{Si } n = 6k + 5, \left[\frac{n}{2} \right] = \left[3k + \frac{5}{2} \right] = 3k + 2, \left[\frac{2n}{3} \right] = \left[4k + \frac{10}{3} \right] = 4k + 3.$$

$$3k + 4k + 5 = 6k + 5 + 335.$$

Resolent l'equació; $k = 335$, aleshores, $n = 6k + 5 = 2015$.

Aleshores, les solucions són $n = 2010, 2017, 2012, 2013, 2014, 2015$.

8.- La diferència entre les xifres de les desenes i les unitats d'un quadrat perfecte S és 3.

Determineu tots els residus de la divisió de S per 100.

Crux Mathematicorum M423.

Solució:

S serà de la forma $S = a \cdot 10^2 + (b + 3)10 + b$, on $a \geq 0$, $0 \leq b \leq 6$.

El residu de dividir S entre 10 és $(b + 3)10 + b$.

Les possibles unitats d'un quadrat perfecte són 0, 1, 4, 5, 6, 9

$$S = q^2$$

Com $0 \leq b \leq 6$, las possibles unitats es redueixen a 0, 1, 4, 5, 6.

Suposem que $b = 0$.

Aleshores $q = c \cdot 10 + 0$. Per tant, $S = q^2 = c \cdot 10^2$, en aquest cas las desenes de S no són 3. Per tant no és solució.

Suposem que $b = 1$.

$$S = a \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 1$$

Aleshores, $q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 1$ o bé, $q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 9$, $d \geq 0$, $0 \leq c \leq 9$.

$$\text{Si } q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 1$$

$$q^2 = d^2 \cdot 10^4 + 2cd \cdot 10^3 + 2d \cdot 10^2 + 2c \cdot 10 + 1.$$

Aleshores $2c \equiv 4 \pmod{10}$. Aleshores, $c = 2, 7$.

Anàlogament, $q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 9$, $c = 2, 7$.

Suposem que $b = 4$.

$$S = a \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 4$$

Aleshores, $q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 2$ o bé, $q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 8$, $d \geq 0$, $0 \leq c \leq 9$.

$$\text{Si } q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 2$$

$$q^2 = d^2 \cdot 10^4 + 2cd \cdot 10^3 + (2d + c^2) \cdot 10^2 + 4c \cdot 10 + 4.$$

Aleshores $2c \equiv 7 \pmod{10}$. Aquesta equació no té solució.

$$\text{Si } q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 8$$

$$q^2 = d^2 \cdot 10^4 + 2cd \cdot 10^3 + (2d + c^2 + 1) \cdot 10^2 + (6c + 6) \cdot 10 + 4.$$

Aleshores $6c + 6 \equiv 7 \pmod{10}$. Aquesta equació no té solució.

Suposem que $b = 5$.

$$S = a \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 5$$

Aleshores, $q = c \cdot 10 + 5$ $0 \leq c \leq 9$.

$$q^2 = (c^2 + c) \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5.$$

Aleshores $2 \equiv 8 \pmod{10}$. Aquesta equació no té solució.

Suposem que $b = 6$.

$$S = a \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 6$$

Aleshores, $q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 4$ o bé, $q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 6$, $d \geq 0$, $0 \leq c \leq 9$.

Si $q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 4$.

$$q^2 = d^2 \cdot 10^4 + 2cd \cdot 10^3 + (8d + c^2 + 1) \cdot 10^2 + (8c + 1) \cdot 10 + 6.$$

Aleshores $8c + 1 \equiv 9 \pmod{10}$. Aleshores, $c = 1,6$.

Si $q = d \cdot 10^2 + c \cdot 10 + 6$. Aleshores, $c = 3,8$.

Per tant els residus de dividir S entre 100 són:

41, 96.

Nota: els valors de q són:

$$q = d \cdot 10^2 + 21$$

$$q = d \cdot 10^2 + 71$$

$$q = d \cdot 10^2 + 29$$

$$q = d \cdot 10^2 + 79$$

$$q = d \cdot 10^2 + 14$$

$$q = d \cdot 10^2 + 64$$

$$q = d \cdot 10^2 + 36$$

$$q = d \cdot 10^2 + 86$$

9.- Si $2n+1$, $3n+1$ són quadrats perfectes per a un n natural, aleshores $5n+3$ no és un nombre primer.

Kömal, març 2010, B4255.

Solució:

Si $2n+1$, $3n+1$ són quadrats perfectes $2n+1=r^2$, $3n+1=s^2$, $r,s \in \mathbb{N}$, $r,s > 1$.

Els polinomis de primer grau amb coeficients racionals són un espai vectorial de dimensió 2 sobre el cos dels racionals.

$\{2n+1, 3n+1\}$ formen una base.

$5n+3 = a(2n+1) + b(3n+1)$, $a,b \in \mathbb{Q}$.

$5n+3 = (2a+3b)n + (a+b)$. Dos polinomis són iguals si tenen els coeficients iguals:

$$\begin{cases} 5 = 2a + 3b \\ 3 = a + b \end{cases}, \text{ la solució del sistema és: } \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}.$$

$$5n+3 = 4(2n+1) - 1(3n+1) = 4r^2 - s^2 = (2r+s)(2r-s), \quad 2r+s \geq 1, \quad 2r-s \geq 1.$$

Per ser $5n+3$ un nombre compost $2r+s \neq 1$, $2r-s \neq 1$.

$r,s > 1$, aleshores, $2r+s > 1$.

Suposem que $2r-s=1$.

Aleshores, $s = 2r-1$.

$$3n+1 = (2r-1)^2.$$

$$3n = 4r^2 - 4r. \quad (1)$$

$$\text{Com } 2n+1 = r^2, \text{ aleshores, } 6n+3 = 3r^2 \quad (2)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2):

$$2(4r^2 - 4r) + 3 = 3r^2.$$

$5r^2 - 8r + 3 = 0$, les solucions de l'equació són $r = 1, \frac{3}{5}$ les dues solucions són

absurdes.

10.- Siguen a_1, a_2, a_3, a_4 nombres consecutius d'una fila del triangle de Pascal.

Proveu que $\frac{a_1}{a_1+a_2}, \frac{a_2}{a_2+a_3}, \frac{a_3}{a_3+a_4}$ formen una progressió aritmètica.

Kömal, B4266. Abril 2010

Solució:

Siguen a_1, a_2, a_3, a_4 nombres consecutius d'una fila del triangle de Pascal:

$$a_1 = \binom{n}{k}, \quad a_2 = \binom{n}{k+1}, \quad a_3 = \binom{n}{k+2}, \quad a_4 = \binom{n}{k+3}.$$

$$b_1 = \frac{a_1}{a_1+a_2} = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}} = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k+1}} = \frac{k+1}{n+1}.$$

$$b_2 = \frac{a_2}{a_2+a_3} = \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}} = \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n+1}{k+2}} = \frac{k+2}{n+1}.$$

$$b_3 = \frac{a_3}{a_3+a_4} = \frac{\binom{n}{k+2}}{\binom{n}{k+2} + \binom{n}{k+3}} = \frac{\binom{n}{k+2}}{\binom{n+1}{k+3}} = \frac{k+3}{n+1}.$$

Aleshores, b_1, b_2, b_3 formen una progressió aritmètica de diferència $\frac{1}{n+1}$.