Problemes de Nombres 13

1.- Els nombres a, b, c, d i e són cinc enters consecutius. Demostreu que la diferència entre la mitjana dels quadrats de c i e i la dels quadrats de a i c és igual a quatre vegades c.
Crux Matematicorum M394

2.- Determineu tots els parells (x,y) d'enters tals que
$x^4 - x + 1 = y^2$.
Crux Mathematicorum M397

3.- Determineu les ternes (a,b,c) d'enters positius tal que $\frac{3ab-1}{abc+1}$ siga un enter positiu.
Crux Mathematicorum M399.

4.- Demostreu que hi ha infinits enters positius imparells n per als quals el nombre $2^n + n$ és un nombre compost (és a dir, no és primer)
Pretorneo internacional de las Ciudades. OMA 2000.

5.- Considerem la llista de naturals, ordenada en orde creixent, que poden ser expressats com la suma de 21 nombres enters consecutius (no necessàriament positius).
Determineu el que ocupa la posició 21ena d'aquesta llista.
Crux Mathematicorum M414.

6.- Demostreu que $10^n + 3\left(4^{n+2}\right) + 5$ és divisible per 9 per a tot enter no negatiu.
Crux Mathematicorum M416

7.- Determineu tot els nombres naturals n que verifiquen la condició:
$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{3}\right] = n + 335$, on $[x] =$ part entera de x.
Olimpíada Espanyola, 2010. Fase local.

8.- La diferència entre les xifres de les desenes i les unitats d'un quadrat perfecte S és 3.
Determineu tots els residus de la divisió de S per 100.
Crux Mathematicorum M423.

9.- Si $2n+1$, $3n+1$ són quadrats perfectes per a un n natural, aleshores $5n+3$ no és un nombre primer.
Kömal, març 2010, B4255.

10.- Siguen a_1, a_2, a_3, a_4 nombres consecutius d'una fila del triangle de Pascal.
Proveu que $\frac{a_1}{a_1+a_2}$, $\frac{a_2}{a_2+a_3}$, $\frac{a_3}{a_3+a_4}$ formen una progressió aritmètica.
Kömal, B4266. Abril 2010