Problemes de Nombres 14

1.- Demostreu que $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=\frac{n(n+2)}{n+1}$.

Crux Mathematicorum M435.

Solució:

$$1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}=\left(\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}\right)^2.$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}.$$

$$\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}=1+\frac{1}{k}+\frac{-1}{k+1}.$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}1+\frac{1}{k}+\frac{-1}{k+1}=n+1-\frac{1}{n+1}=\frac{n(n+2)}{n+1}.$$

2.- Resoleu l'equació $x+y=x^2-xy+y^2$ en els nombres enters.
Kömal C1042.

Solució:
$x^2-(y+1)x+y^2-y=0$. Resolent l'equació en la incògnita x:

$$x=\frac{y+1\pm\sqrt{(y+1)^2-4(y^2-y)}}{2}=\frac{y+1\pm\sqrt{-3y^2+6y+1}}{2}.$$

El discriminant de l'equació ha de ser positiu o zero:
$-3y^2+6y+1\geq 0$.

Siga $-3y^2+6y+1=0$. Resolent l'equació:

$$y=\frac{-6\pm\sqrt{48}}{-6}=\begin{cases}1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\approx -0.2\\ 1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\approx 2.2\end{cases}.$$

Resolent la inequació $-3y^2+6y+1\geq 0$:

$$y\in\left[1-\frac{2\sqrt{3}}{3},1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right].$$

Les úniques solucions enteres en l'interval són $y=0,1,2$.
Si $y=0$, $x^2-x=0$. Resolent l'equació: $x=0,1$.
Si $y=1$, $x^2-2x=0$. Resolent l'equació: $x=0,2$.
Si $y=2$, $x^2-3x+2=0$. Resolent l'equació: $x=1,2$.

Les solucions enteres de l'equació són:

$$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases},\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases},\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases},\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases},\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases},\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}.$$

3.- Demostreu que $(2n-1)^{2n+1}+(2n+1)^{2n-1}$ és divisible per 4.
Kömal C1053. Novembre 2010.

Solució:
Suposem que n és parell $n=2k$
$(2n-1)^{2n+1}+(2n+1)^{2n-1}=(4k-1)^{4k+1}+(4k+1)^{4k-1}\equiv -1+1(\text{mòd}4)=0(\text{mòd}4)$.

Suposem que n és imparell $n=2k+1$.
$(2n-1)^{2n+1}+(2n+1)^{2n-1}=(4k+1)^{4k+3}+(4(k+1)-1)^{4k+1}\equiv 1+(-1)(\text{mòd}4)=0(\text{mòd}4)$.

Aleshores, per qualsevol n tenim que $(2n-1)^{2n+1}+(2n+1)^{2n-1}$ és divisible per 4.

4.- Siga n un enter positiu.
a) Si l'enter positiu d és un divisor de cadascun dels enters n^2+n+1, $2n^3+3n^2+3n-1$, demostreu que d és també divisor de n^2+n-1.

b) Demostreu que la fracció $\frac{n^2+n+1}{2n^3+3n^2+3n-1}$ és irreductible.

Crux Mathematicorum M455.

Solució:
Si un enter positiu d divideix els enters a, b aleshores d divideix $\alpha a+\beta b$ on α,β són enters.

a)
d divideix n^2+n+1, $2n^3+3n^2+3n-1$.
Aleshores d divideix $(2n^3+3n^2+3n-1)-2n(n^2+n+1)=n^2+n-1$.

b)
Notem que n^2+n+1.
Si $n=2k$, $n^2+n+1=2(2k^2+k)+1$.
Si $n=2k+1$, $n^2+n+1=4k^2+4k+1+2k+1+1=2(2k^2+3k+1)+1$.

Pel apartat a) si d divideix n^2+n+1, $2n^3+3n^2+3n-1$ aleshores:
d divideix n^2+n+1, n^2+n-1.
Aleshores d divideix $(n^2+n+1)-(n^2+n-1)=2$.
Aleshores $d=1, 2$.
d divideix n^2+n+1 i a més a més n^2+n+1 és imparell, aleshores $d=1$.
Per tant, n^2+n+1, $2n^3+3n^2+3n-1$ són primers entre ells perquè l'únic divisor és $d=1$.

Aleshores, $\frac{n^2+n+1}{2n^3+3n^2+3n-1}$ és irreductible.

5.- Un nombre en base n s'escriu $2011_{(n}$ i en base $n+3$ s'escriu $537_{(n+3}$. Determineu el nombre en base 10.
Kömal C1070.

Solució:
Si escrivim el nombre en forma potencial.
$N = 2011_{(n} = 1 + n + 2n^3$.
$N = 537_{(n+3} = 7 + 3n + 5n^2$.
Si igualem les expressions:
$1 + n + 2n^3 = 7 + 3n + 5n^2$.
$2n^3 - 5n^2 - 32n - 60 = 0$.
Utilitzant la regla de Ruffini, l'única solució entera és:
$n = 6$.
El nombre en base 10 és:
$N = 1 + 6 + 2 \cdot 6^3 = 439_{(10}$.

6.- Si a un nombre de 3 xifres li esborrem la xifra central resulta la setena part del nombre inicial.
De quin nombre es tracta?.
Kömal K289.

Solució:
Siga el nombre $abc_{(10} = 100a + 10b + c$, $a = 1,2,...,9$, $b,c = 0,1,2,...,9$
Si li esborrem la xifra central queda el nombre $ac_{(10} = 10a + c$.
Aleshores, $7(10a + c) = 100a + 10b + c$.
Simplificant:
$30a + 10b - 6c = 0$.
$15a + 5b - 3c = 0$.
$15a + 5b = 3c < 27$.
Aleshores, $a = 1$.
$3c - 5b = 15$.
L'única solució de l'equació és $\begin{cases} b = 0 \\ c = 5 \end{cases}$.
El nombre que cerquem és 105.

7.- Determineu tots els enters tal que $n-50$ i $n+50$ simultàniament són quadrats perfectes.
Olimpíada 2011 fase local Valladolid.

Solució:
Suposem $n-50=p^2$ i $n+50=q^2$, $p,q\in N\cup\{0\}$, $q>p$.
Restant les dues igualtats:
$q^2-p^2=100$.
$(q+p)(q-p)=2^2\cdot 5^2$, $p,q\in N\cup\{0\}$.

Aleshores,
$\begin{cases} q-p=2 \\ q+p=50 \end{cases}$, $\begin{cases} q=26 \\ p=24 \end{cases}$, Aleshores, $n=626$.
$\begin{cases} q-p=10 \\ q+p=10 \end{cases}$, $\begin{cases} q=10 \\ p=0 \end{cases}$, Aleshores, $n=50$.

$\begin{cases} q-p=1 \\ q+p=100 \end{cases}$, $\begin{cases} q-p=4 \\ q+p=25 \end{cases}$, no tenen solució entera.

8.- Siga un nombre natural A i siga B el mateix nombre canviant d'ordre les xifres d'A.
Proveu que $A+B$ o $A-B$ és múltiple d'11.
KöMaL, B4353

Solució:
$10 \equiv -1(\text{mòd}\,11)$.

$10^{2i-1} \equiv -1(\text{mòd}\,11)$.

$10^{2i} \equiv 1(\text{mòd}\,11)$.

$10^{2i-1} + 1 \equiv 0(\text{mòd}\,11)$ (1)

$10^{2i} - 1 \equiv 0(\text{mòd}\,11)$ (2)

a) Suposem que el nombre de xifres d'A és parell:
$A = a_{2n-1}10^{2n-1} + a_{2n-2}10^{2n-2} + \ldots\ldots.. + a_1 10 + a_0$.
$B = a_0 10^{2n-1} + a_1 10^{2n-2} + \ldots\ldots.. + a_{2n-2}10 + a_{2n-1}$.

$A+B = (a_0 + a_{2n-1})(10^{2n-1}+1) + (a_1 + a_{2n-2})10(10^{2(n-1)-1}+1) + \ldots. + (a_n + a_{n+1})10^n(10+1)$.
Aplicant el resultat (1) tots els sumands són múltiples d'11.
Aleshores, $A+B$ és múltiple d'11.

b) Suposem que el nombre de xifres d'A és imparell.
$A = a_{2n}10^{2n} + a_{2n-1}10^{2n-1} + \ldots\ldots.. + a_1 10 + a_0$.
$B = a_0 10^{2n} + a_1 10^{2n-1} + \ldots\ldots.. + a_{2n-1}10 + a_{2n}$.

$A-B = (-a_0 + a_{2n})(10^{2n}-1) + (-a_1 + a_{2n-1})10(10^{2(n-1)}-1) + \ldots. + (-a_{n-1} + a_{n+1})10^{n-1}(10^2-1) + 0$
Aplicant el resultat (2) tots els sumands són múltiples d'11.
Aleshores, $A-B$ és múltiple d'11.

9.- Quin és el nombre de tres xifres que és igual a dotze vegades la suma de les seues xifres.
KöMaL C1075.

Solució:
Siga $N = abc_{(10} = 100a + 10b + c$, $1 \le a \le 9$, $0 \le b, c \le 9$.

Per hipòtesi, $100a + 10b + c = 12(a + b + c)$.
$88a - 2b - 11c = 0$.
$11c = 2(44a - b)$.
Aleshores, c és un nombre parell.
$11c = 2(44a - b) \ge 2(44 \cdot 1 - 9) = 70$.
Aleshores, $c \ge 7$.
Per tant, $c = 8$.
$88a - 2b - 11 \cdot 8 = 0$, simplificant,
$b = 44(a - 1)$.
Com que, $0 \le b \le 9$, $a - 1 = 0$, aleshores, $a = 1$ i per tant, $b = 0$.

El nombre que cerquem és 108.

Quants naturals n, $n \geq 0$ compleixen que $\frac{n^2+2011}{n+1}$ és natural.

Olimpíada Bèlgica.

Solució:
Efectuant la divisió:

$$\frac{n^2+2011}{n+1} = n-1+\frac{2012}{n+1}.$$

A fi que $\frac{n^2+2011}{n+1} \in N$, $\frac{2012}{n+1} \in N$.

És a dir, $n+1$ ha de ser divisor de 2012.

$2012 = 2^2 \cdot 503$.

El nombre de divisors de 2012 és $(2+1)(1+1)=6$.