Problemes de Nombres 14

1.- Demostreu que $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=\frac{n(n+2)}{n+1}$.
Crux Mathematicorum M435.

2.- Resoleu l'equació $x+y=x^2-xy+y^2$ en els nombres enters.
Kömal C1042.

3.- Demostreu que $(2n-1)^{2n+1}+(2n+1)^{2n-1}$ és divisible per 4.
Kömal C1053. Novembre 2010.

4.- Siga n un enter positiu.
a) Si l'enter positiu d és un divisor de cadascun dels enters n^2+n+1, $2n^3+3n^2+3n-1$, demostreu que d és també divisor de n^2+n-1.
b) Demostreu que la fracció $\frac{n^2+n+1}{2n^3+3n^2+3n-1}$ és irreductible.
Crux Mathematicorum M455.

5.- Un nombre en base n s'escriu $2011_{(n}$ i en base $n+3$ s'escriu $537_{(n+3}$. Determineu el nombre en base 10.
Kömal C1070.

6.- Si a un nombre de 3 xifres li esborrem la xifra central resulta la setena part del nombre inicial.
De quin nombre es tracta?.
Kömal K289.

7.- Determineu tots els enters tal que $n-50$ i $n+50$ simultàniament són quadrats perfectes.
Olimpíada 2011 fase local Valladolid.

8.- Siga un nombre natural A i siga B el mateix nombre canviant d'ordre les xifres d'A. Proveu que $A+B$ o $A-B$ és múltiple d'11.
KöMaL, B4353

9.- Quin és el nombre de tres xifres que és igual a dotze vegades la suma de les seues xifres.
KöMaL C1075.

Quants naturals n, $n\geq 0$ compleixen que $\frac{n^2+2011}{n+1}$ és natural.
Olimpíada Bèlgica.