

### Problemes de Nombres 15

1.- Siga la funció  $f(x)$  que compleix:

$$f(1) = a, \text{ per a tots el naturals } n, n \geq 2, f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2 f(n).$$

Calculeu  $f(n)$ .

*Proves Cangur 2011. Nivell 4, problema 29.*

Solució:

$$f(1) = \frac{1}{1} f(1).$$

$$f(1) + f(2) = 2^2 f(2), \text{ aleshores, } f(2) = \frac{1}{3} f(1).$$

$$f(1) + f(2) + f(3) = 3^2 f(3), \text{ aleshores, } f(3) = \frac{1}{6} f(1).$$

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 4^2 f(4), \text{ aleshores, } f(4) = \frac{1}{10} f(1).$$

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 5^2 f(5), \text{ aleshores, } f(5) = \frac{1}{15} f(1).$$

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 6^2 f(6), \text{ aleshores, } f(6) = \frac{1}{21} f(1).$$

La successió dels denominadors és:

1, 3, 6, 10, 15, 21,.....

El seu terme general és  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

Provem per inducció completa que  $f(n) = \frac{2}{n(n+1)} f(1)$ .

Per als primers termes  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  es compleix.

Suposem que per a  $n = k$  s'acompleix  $f(k) = \frac{2}{k(k+1)} f(1)$ .

Provem que la propietat s'acompleix per a  $n = k + 1$ :

$$f(1) + f(2) + \dots + f(k) + f(k+1) = (k+1)^2 f(k+1).$$

$$k^2 f(k) + f(k+1) = (k+1)^2 f(k+1)$$

Aplicant la hipòtesi d'inducció:

$$\frac{2k^2}{k(k+1)} f(1) + f(k+1) = (k+1)^2 f(k+1).$$

$$\frac{2k}{k+1} f(1) + f(k+1) = (k+1)^2 f(k+1).$$

$$\frac{2k}{k+1} f(1) = ((k+1)^2 - 1) f(k+1).$$

$$\frac{2k}{k+1} f(1) = ((k+1)+1)k f(k+1).$$

$$f(k+1) = \frac{2}{(k+1)((k+1)+1)} f(1). \text{ Aleshores la propietat s'acompleix.}$$

$$\text{Per tant, } f(n) = \frac{2}{n(n+1)} f(1) = \frac{2a}{n(n+1)}.$$

2.- Determineu tots els nombres naturals  $n$  tal que  $2^n - 1$  i  $2^{n+2} - 1$  siguin primers i que  $2^{n+1} - 1$  no siga divisible per 7.  
*KöMaL, B4365. Maig 2011.*

Solució:

Aplicanrem la conseqüència del teorema de Fermat.

Teorema de Fermat.

Siga  $p$  un nombre primer, aleshores  $a^p \equiv a \pmod{p} \quad \forall a \in \mathbb{N}$ .

**Conseqüència:**

Siga  $p$  un nombre primer i  $a$  un natural tal que  $p$  no divideix  $a$ , aleshores:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Siga  $n = 6k$ .

$$2^n - 1 = 2^{6k} - 1 = (2^{3k})^2 - 1 \equiv 1 - 1 \pmod{3} = 0 \pmod{3}.$$

Aleshores  $2^n - 1$  és múltiple de 3, per tant no és primer.

Siga  $n = 6k + 1$ .

$$2^{n+2} - 1 = 2^{6k+3} - 1 = (2^k)^6 2^3 - 1 \equiv 1 \cdot 8 - 1 \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}.$$

Aleshores,  $2^{n+2} - 1$  és múltiple de 7, per tant no és primer.

Siga  $n = 6k + 2$ .

$$2^n - 1 = 2^{6k+2} - 1 = (2^{3k+1})^2 - 1 \equiv 1 - 1 \pmod{3} = 0 \pmod{3}.$$

Aleshores  $2^n - 1$  és múltiple de 3, per tant no és primer.

Siga  $n = 6k + 3$ .

$$2^n - 1 = 2^{6k+3} - 1 = (2^k)^6 2^3 - 1 \equiv 1 \cdot 8 - 1 \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}.$$

Aleshores  $2^n - 1$  és múltiple de 7, per tant no és primer.

Siga  $n = 6k + 4$ .

$$2^n - 1 = 2^{6k+4} - 1 = (2^{3k+2})^2 - 1 \equiv 1 - 1 \pmod{3} = 0 \pmod{3}.$$

Aleshores  $2^n - 1$  és múltiple de 3, per tant no és primer.

Siga  $n = 6k + 5$ .

$$2^{n+1} - 1 = 2^{6k+6} - 1 = (2^{k+1})^6 - 1 \equiv 1 - 1 \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}.$$

Aleshores,  $2^{n+1} - 1$  és divisible per 7.

Per tant, no existeix cap natural  $n$  que compleisca les tres hipòtesis a la vegada.

3.- Siguen els nombres naturals  $abc_{(10)}$ ,  $ab_{(10)}$ .

Determineu els dígits a, b, c tal que:

$$\sqrt{abc_{(10)}} = ab_{(10)} - \sqrt{c}.$$

*Concurs Nacional Romania 2011. Junior.*

Solució:

$$1 \leq a \leq 9, 0 \leq b, c \leq 9.$$

$$100 \leq abc_{(10)} \leq 999. \quad \sqrt{abc_{(10)}} \leq \sqrt{999} < 32.$$

$$ab_{(10)} - \sqrt{c} < 32, \sqrt{c} \leq 3.$$

$$ab_{(10)} < 35.$$

Aleshores,  $a \leq 3$ .

$$100 \leq abc_{(10)} \leq 359.$$

$$\sqrt{abc_{(10)}} \leq \sqrt{359} < 19. \quad ab_{(10)} - \sqrt{c} < 19, \sqrt{c} \leq 3.$$

$$ab_{(10)} < 22.$$

Aleshores,  $a \leq 2$ .

$$100 \leq abc_{(10)} \leq 229.$$

$$\sqrt{abc_{(10)}} \leq \sqrt{229} < 16. \quad ab_{(10)} - \sqrt{c} < 16, \sqrt{c} \leq 3.$$

$$ab_{(10)} < 19.$$

Aleshores,  $a = 1$ .

Elevem al quadrat l'expressió  $\sqrt{1bc_{(10)}} = 1b_{(10)} - \sqrt{c}$ :

$$100 + 10b + c = (10 + b - \sqrt{c})^2.$$

$$100 + 10b + c = 100 + b^2 + c + 20b - 20\sqrt{c} - 2b\sqrt{c}. \text{ Simplificant:}$$

$$10b = b^2 + 20b - 20\sqrt{c} - 2b\sqrt{c}.$$

$$b^2 + 10b = (20 - 2b)\sqrt{c}. \text{ Aleshores, } \sqrt{c} \in \mathbb{N}. \text{ Per tant, } c = 1, 4, 9.$$

Suposem que  $c = 1$ .

$$b^2 + 8b - 20 = 0. \text{ Resolent l'equació } b = 2. \text{ Aleshores, } abc_{(10)} = 121.$$

$$\sqrt{121} = 12 - \sqrt{1}, \text{ aleshores, aquest resultat és vàlid.}$$

Suposem que  $c = 4$ .

$$b^2 + 6b - 40 = 0. \text{ Resolent l'equació } b = 4. \text{ Aleshores, } abc_{(10)} = 144.$$

$$\sqrt{144} = 14 - \sqrt{4}, \text{ aleshores, aquest resultat és vàlid.}$$

Suposem que  $c = 9$ .

$$b^2 + 4b - 60 = 0. \text{ Resolent l'equació } b = 6. \text{ Aleshores, } abc_{(10)} = 169.$$

$$\sqrt{169} = 16 - \sqrt{9}, \text{ aleshores, aquest resultat és vàlid.}$$

4.- Calculeu n natural tal que  $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_n (n+1) = 10$ .

*KöMaL, C704.*

Solució:

Escrivint l'expressió en logaritmes de base 2:

$$\log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \dots \cdot \frac{\log_2 (n+1)}{\log_2 n} = 10.$$

Simplificant:

$$\log_2 (n+1) = 10.$$

$$n+1 = 2^{10}.$$

$$n = 2^{10} - 1 = 1023.$$

5.- Determineu el nombre natural  $n$  tal que  $n^2 + 10n$  és un quadrat perfecte.  
*KöMaL, B3744.*

Solució:

Siga  $n^2 + 10n = q^2$ ,  $n, q \in \mathbb{N}$ .

$$n^2 + 10n - q^2 = 0.$$

Resolent l'equació de segon grau:

$$n = -5 + \sqrt{25 + q^2}, \text{ aleshores } q > 5.$$

$25 + q^2$  ha de ser un quadrat perfecte, per tant:

$$25 + q^2 = k^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$k^2 - q^2 = 25, \text{ aleshores, } k > q.$$

$$(k + q)(k - q) = 25.$$

Aleshores:

$$\begin{cases} k - q = 1 \\ k + q = 25 \end{cases}, \begin{cases} k - q = 5 \\ k + q = 5 \end{cases}$$

$$\text{Si } \begin{cases} k - q = 1 \\ k + q = 25 \end{cases}, \text{ aleshores, } q = 12.$$

$$\text{Per tant, } n = -5 + \sqrt{25 + 144} = 8.$$

$$\text{Si } \begin{cases} k - q = 5 \\ k + q = 5 \end{cases}, \text{ aleshores, } q = 0, \text{ la qual cosa és absurda ja que } q > 5.$$

6.- En una progressió aritmètica el primer terme és 1, el segon terme n i la suma dels n primers termes és 3n.

Determineu n.

*KöMaL, C1087*

Solució:

Si el primer terme és 1 i el segon terme n la diferència és  $n - 1$

El terme n-èsim de la progressió és:

$$1 + (n - 1)(n - 1).$$

Si la suma dels n primers termes és 3n, aleshores:

$$\frac{1 + 1 + (n - 1)(n - 1)}{2} n = 3n. \text{ Simplificant:}$$

$$2 + (n - 1)^2 = 66.$$

Resolent l'equació:

$$n = 9.$$

7.- Siguen  $a, b, c$  tres nombres reals positius.

Proveu que  $6a + 4b + 5c \geq 5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc}$ .

*KöMaL, B3784.*

Solució:

$5a, 5b > 0$ . Aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica:

$5a + 5b \geq 2\sqrt{5a \cdot 5b}$ , la igualtat s'assoleix quan  $5a = 5b$ .

$$5a + 5b \geq 10\sqrt{ab} \quad (1)$$

$7a, 7c > 0$ . Aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica:

$$7a + 7c \geq 14\sqrt{ac} \quad (2)$$

$3b, 3c > 0$ . Aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica:

$$3b + 3c \geq 6\sqrt{bc} \quad (3)$$

Sumant les expressions (1), (2), (3):

$$12a + 8b + 10c \geq 2(5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc}).$$

Simplificant:

$$6a + 4b + 5c \geq 5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc}, \text{ la igualtat s'assoleix quan } a = b = c.$$

8.- Proveu que  $2^{2n+3} + 3^{n+2} \cdot 7^n$  és múltiple de 17.  
*KöMaL març 1999, Gy3264.*

Solució 1:

$$\begin{aligned} 2^{2n+3} + 3^{n+2} \cdot 7^n &= 2^3 \cdot (2^2)^n + 3^2 \cdot 3^n \cdot 7^n = \\ &= 8 \cdot 4^n + 9 \cdot 21^n \equiv 8 \cdot 4^n + 9 \cdot 4^n \pmod{17} \equiv \\ &\equiv 17 \cdot 4^n \pmod{17} \equiv \\ &\equiv 0 \pmod{17}. \end{aligned}$$

Aleshores,  $2^{2n+3} + 3^{n+2} \cdot 7^n$  múltiple de 17.

Solució 2:

Ho provarem per inducció completa.

Siga  $n = 1$ .

$$2^{2n+3} + 3^{n+2} \cdot 7^n = 2^5 + 3^2 \cdot 7 = 221 = 17 \cdot 13.$$

Per a  $n = 1$  és certa la propietat

Suposem certa la propietat per a  $n = k$ .

$2^{2k+3} + 3^{k+2} \cdot 7^k$  és múltiple de 17.

Siga  $2^{2k+3} = a + 17r$ ,  $3^{k+2} = b + 17s$ ,  $7^k = c + 17t$ .

Per hipòtesi,  $a + bc$  és múltiple de 17, aleshores,  $a + bc = 17d$ .

Vegem que la propietat és certa per a  $n = k + 1$ .

$$2^{2(k+1)+3} = 2^{2k+3} \cdot 2^2 = 4(a + 17r) = 4a + 17(4r).$$

$$3^{(k+1)+2} = 3^{k+1} \cdot 3 = 3(b + 17s) = 3b + 17(3s).$$

$$7^{k+1} = 7^k \cdot 7 = 7(c + 17t) = 7c + 17(7t).$$

$$\begin{aligned} 2^{2(k+1)+3} + 3^{(k+1)+2} \cdot 7^{k+1} &= 4a + 17(4r) + (3b + 17(3s))(7c + 17(7t)) = \\ &= 4a + 17(4r) + 21bc + 17(21bt + 139cs + 17 \cdot 21st) = \\ &= 4a + 4bc + 17bc + 17(4r) + 17(21bt + 139cs + 17 \cdot 21st) = \\ &= 4(a + bc) + 17(bc + 4r + 21bt + 139cs + 17 \cdot 21st) = \\ &= 4(17d) + 17(bc + 4r + 21bt + 139cs + 17 \cdot 21st) = \\ &= 17(4d + bc + 4r + 21bt + 139cs + 17 \cdot 21st) = \end{aligned}$$

Aleshores,  $2^{2(k+1)+3} + 3^{(k+1)+2} \cdot 7^{k+1}$  és múltiple de 17.

9.- Determineu tots els nombres naturals  $x, y, z$  tal que 
$$\begin{cases} xyz = 4104 \\ x + y + z = 77 \end{cases}$$

*OMA, Olimpíada de Mayo 2004.*

Solució:

$$1 \leq x, y, z \leq 75.$$

$$4104 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 19.$$

Un dels factors  $x, y, z$  és múltiple de 19.

Els múltiples de 19 menors que 75 són:

19, 19·2, 19·3.

Suposem que  $x = 19$ .

$$\begin{cases} yz = 2^3 \cdot 3^3 \\ y + z = 58 \end{cases}, x, y \text{ han de ser solucions naturals de l'equació } a^2 - 58a + 2^3 3^3 = 0.$$

Les solucions de l'equació són  $a = 54, 4$ .

Aleshores les solucions són:

$$\begin{cases} x = 19 \\ y = 54 \text{ o qualsevol permutació d'aquestes solucions,} \\ z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 19 \\ y = 4 \\ z = 54 \end{cases}, \begin{cases} x = 54 \\ y = 19 \\ z = 4 \end{cases}, \begin{cases} x = 54 \\ y = 4 \\ z = 19 \end{cases}, \begin{cases} x = 4 \\ y = 54 \\ z = 19 \end{cases}, \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 54 \end{cases}$$

Suposem que  $x = 19 \cdot 2 = 38$ .

$$\begin{cases} yz = 2^2 \cdot 3^3 \\ y + z = 39 \end{cases}, x, y \text{ han de ser solucions naturals de l'equació } a^2 - 39a + 2^2 3^3 = 0.$$

Les solucions de l'equació són  $a = 36, 3$ .

Aleshores les solucions són:

$$\begin{cases} x = 38 \\ y = 36 \text{ o qualsevol permutació d'aquestes solucions,} \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 38 \\ y = 3 \\ z = 36 \end{cases}, \begin{cases} x = 36 \\ y = 38 \\ z = 3 \end{cases}, \begin{cases} x = 36 \\ y = 3 \\ z = 38 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = 36 \\ z = 38 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = 38 \\ z = 39 \end{cases}$$

Suposem que  $x = 19 \cdot 3 = 57$ .

$$\begin{cases} yz = 2^3 \cdot 3^2 \\ y + z = 20 \end{cases}, x, y \text{ han de ser solucions naturals de l'equació } a^2 - 20a + 2^3 3^2 = 0.$$

Aquesta equació no té solució natural.

10.- Proveu que si  $a, b, c, d$  són nombres naturals consecutius  $d^2$  divideix la suma  $a + b^2 + c^3$ .  
*KöMaL, K318.*

Solució:

si  $a, b, c, d$  són nombres naturals consecutius,  $c = d - 1$ ,  $b = d - 2$ ,  $a = d - 3$ .

$$\begin{aligned} a + b^2 + c^3 &= d - 3 + (d - 2)^2 + (d - 1)^3 = \\ &= d - 3 + d^2 - 4d + 4 + d^3 - 3d^2 + 3d - 1 = \\ &= d^3 - d^2 = \\ &= d^2(d - 1). \end{aligned}$$

Aleshores,  $d^2$  divideix la suma  $a + b^2 + c^3$ , també divideix la suma  $c$ .