Problemes de Nombres 15

1.- Siga la funció f(x) que compleix:
$f(1) = a$, per a tots el naturals n, $n \geq 2$, $f(1) + f(2) + \dots\dots + f(n) = n^2 f(n)$.
Calculeu $f(n)$.
Proves Cangur 2011. Nivell 4, problema 29.

2.- Determineu tots els nombres naturals n tal que $2^n - 1$ i $2^{n+2} - 1$ siguen primers i que $2^{n+1} - 1$ no siga divisible per 7.
KöMaL, B4365. Maig 2011.

3.- Siguen els nombres naturals $abc_{(10}$, $ab_{(10}$.
Determineu els dígits a, b, c tal que:
$\sqrt{abc_{(10}} = ab_{(10} - \sqrt{c}$.
Concurs Nacional Romania 2011. Junior.

4.- Calculeu n natural tal que $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots\dots \cdot \log_n (n+1) = 10$.
KöMaL, C704.

5.- Determineu el nombre natural n tal que $n^2 + 10n$ és un quadrat perfecte.
KöMaL, B3744.

6.- En una progressió aritmètica el primer terme és 1, el segon terme n i la suma dels n primers termes és $3n$.
Determineu n.
KöMaL, C1087

7.- Siguen a, b, c tres nombres reals positius.
Proveu que $6a + 4b + 5c \geq 5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc}$.
KöMaL, B3784.

8.- Proveu que $2^{2n+3} + 3^{n+2} \cdot 7^n$ és múltiple de 17.
KöMaL març 1999, Gy3264.

9.- Determineu tots els nombres naturals x, y, z tal que $\begin{cases} xyz = 4104 \\ x + y + z = 77 \end{cases}$.
OMA, Olimpíada de Mayo 2004.

10.- Proveu que si a, b, c, d són nombres naturals consecutius d^2 divideix la suma $a + b^2 + c^3$.
KöMaL, K318.