

## Problemes de nombres 1

1.- Estudieu si existeix un nombre natural  $n$  tal que  $2^2$  divideix a  $n$ ,  $3^2$  divideix a  $n+1$ ,  $4^2$  divideix a  $n+2$ .

2.-

a) Comproveu que  $2^5 \cdot 9^2 = 2592$

b) Estudieu si és possible que  $2^5 \cdot a^b = (25ab)_{10}$ , per a valors distints dels de l'apartat anterior.

3.- Siguen  $a$  i  $b$  dos nombres naturals.

Calculeu el nombre de múltiples de  $b$  que apareixen en la successió  $a, 2a, 3a, \dots, ba$

4.- Determineu tots els parells de nombres naturals  $(a, b)$  tals que

$$\text{mcd}(a, b) = 18, \quad \text{mcm}(a, b) = 540$$

5.- Determineu una terna de nombres enters  $(x, y, z)$  que compleisca

$$\text{mcd}(198, 288, 512) = 198x + 288y + 512z$$

6.- Demostreu que el nombre real  $\log_2 3$  és irracional.

7.- Demostreu que l'última xifra decimal de  $2^{2^n} + 1$  és 7 per a tot nombre natural  $n$  major o igual que 2.

8.- Demostreu que l'equació  $x^2 + y^2 = x^2 y^2$  no té solució en els nombres naturals.

9.- Sense efectuar la multiplicació, calculeu la xifra  $a$  en el producte en base 10.

$$89878 \cdot 58965 = 5299a56270$$

10.- Utilitzant la congruència  $19^2 \equiv 2^2 \pmod{19}$  descomponeu en factors primers el nombre 119.

11.- Calculeu el residu de la divisió del producte  $2^{50} \cdot 41^{65}$  entre 7.

12.- Determineu totes les solucions enteres de l'equació diofàntica

$$101x + 102y + 103z = 1$$

13.- Determineu les solucions enteres del sistema següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 31 \\ x + 2y + 3z = 41 \end{cases}$$

14.- Determineu tots els nombres naturals  $m$  tals que  $1066 \equiv 1776 \pmod{m}$

15.- Demostreu que si  $n$  és un nombre natural aleshores  $4^n \equiv 1 + 3n \pmod{9}$