Problemes nombres:

1.- S'anomenen nombres triangulars els nombres naturals n de la forma
$n = \frac{k(k+1)}{2} = 1+2+3+.......+k$, amb k nombre natural.
a) Demostreu que si n és un nombre triangular, aleshores $9n+1$ també ho és.
b) Determineu els valors dels nombres naturals a i b per tal que $an+b$ siga triangular sempre que n siga triangular.

2.- Busqueu el mínim nombre natural n > 0 tal que $\frac{n}{2}$ siga un quadrat, $\frac{n}{3}$ siga un cub, i $\frac{n}{7}$ siga una potència setena.

3.- Trobeu tots el nombres enters iguals a la suma dels quadrats de les seues xifres.

4.-
i) Si n és un nombre natural i 2^{n+12}, i 2^n denoten la mesura d'un angle expressada en graus sexagesimals, demostreu que $\sin(2^{n+12}) = \sin(2^n)$ si $n \geq 3$.
ii) Trobeu el valor més petit de n per al qual l'expressió $\sin(2^n)$ pren el valor més gran possible

5.- Esbrineu si en el conjunt de nombres $\{1,2,3,.......10^9\}$ n'hi ha més nombres que contenen la xifra 9 o més que no la contenen.

6.- Trobeu el mínim nombre natural n que és múltiple de 3 i tal que, a més, $n+1$ és múltiple de 5, $n+2$ és múltiple de 7, $n+3$ és múltiple de 9 i $n+4$ és múltiple de 11.

7.- Efectueu la divisió entera:
$2003^{2003} \,|\, \underline{2004\quad}$

8.- Trobeu els nombre natural més petit que siga divisible per 847 i que tinga totes les xifres iguals.

9.- Trobeu tots el nombres enters m, n, solucions de l'equació $9^m = 4n^2 + 1$

1.- S'anomenen nombres triangulars els nombres naturals n de la forma

$n = \dfrac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + ... + k$, amb k nombre natural.

a) Demostreu que si n és un nombre triangular, aleshores $9n+1$ també ho és.

b) Determineu els valors dels nombres naturals a i b per tal que $an+b$ siga triangular sempre que n siga triangular.

a) Si $n = k(k+1)/2$ tindrem $9k(k+1)/2 + 1 = (9k^2 + 9k + 2)/2$. Descomponent el polinomi obtenim

$$9n+1 = \frac{1}{2}\left(9\left(k+\frac{1}{3}\right)\left(k+\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}(3k+1)(3k+2)$$

i el nombre $9n+1$ també és triangular.

b) Suposant n triangular anem a veure quines condicions han de complir a i b per tal que $an+b$ ho sigui. És a dir, suposant que $n = k(k+1)/2$ imposem que $an+b = r(r+1)/2$ i determinarem les condicions que han de complir a, b i r per fer possible la igualtat. Tindrem

$$a\frac{k(k+1)}{2} + b = \frac{r(r+1)}{2} \quad \text{o bé} \quad ak(k+1) + 2b = r^2 + r.$$

Obtenim l'equació de segon grau en r, $r^2 + r - (ak(k+1) + 2b) = 0$ $(*)$ que haurà de tenir solucions enteres per a cada valor de k. Això només succeirà quan el discriminant de l'equació sigui un quadrat perfecte. Ara bé, el discriminant $\Delta = 1 + 4ak(k+1) + 8b$ és un polinomi de segon grau en k i si és un quadrat perfecte haurà de ser el d'un cert polinomi de primer grau en k. Posem $1 + 4ak(k+1) + 8b = (sk+t)^2$ amb s i t independents de k. Fent operacions i identificant coeficients surt $4a = s^2 = 2st$ i $8b + 1 = t^2$. Per tant, $s = 2t$ i obtenim en funció de t

$$a = t^2, \quad b = \frac{t^2-1}{8}.$$

Per tal que a i b siguin enters, $(t^2-1)/8$ ha de ser enter. Això és possible sempre que t sigui un nombre senar, ja que si $t = 2m-1$, tenim

$$t^2 - 1 = (2m-1)^2 - 1 = 4m^2 - 4m = 4m(m-1)$$

i com que un dels dos nombres m o $m-1$ és parell, serà $t^2 - 1 = \dot{8}$ per a tot t senar.

Per tant, si t és senar, $a = t^2$ i $b = (t^2-1)/8$ són els nombres que faran $an+b$ triangular. Per tal de comprovar-ho, trobem l'expressió de $an+b$ resolent l'equació $(*)$ amb els valors de a i b que acabem de calcular. S'obté

$$r = \frac{-1 \pm (2tk + t)}{2}$$

i l'única solució entera i positiva serà $r = tk + \frac{(t-1)}{2}$. Així,

$$an+b = \frac{r(r+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(tk + \frac{t-1}{2}\right)\left(tk + \frac{t+1}{2}\right).$$

2.- Busqueu el mínim nombre natural n > 0 tal que $\frac{n}{2}$ siga un quadrat, $\frac{n}{3}$ siga un cub, i $\frac{n}{7}$ siga una potència setena.

Solució:

El nombre n ha de ser de la forma $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 7^\gamma$.

Si $n/2$ és un quadrat, $\alpha = \dot{2} + 1$, $\beta = \dot{2}$, $\gamma = \dot{2}$.

Si $n/3$ és un cub, $\alpha = \dot{3}$, $\beta = \dot{3} + 1$, $\gamma = \dot{3}$.

Si $n/7$ és una potència setena, $\alpha = \dot{7}$, $\beta = \dot{7}$, $\gamma = \dot{7} + 1$.

D'aquí resulta que

$$\begin{aligned} \alpha &= \dot{21} \quad \text{i} \quad \alpha = \dot{2} + 1 \\ \beta &= \dot{14} \quad \text{i} \quad \beta = \dot{3} + 1 \\ \gamma &= \dot{6} \quad \text{i} \quad \gamma = \dot{7} + 1 \end{aligned}$$

i la solució més petita és $\alpha = 21$, $\beta = 28$, $\gamma = 36$. D'on resulta que

$$n = 2^{21} \cdot 3^{28} \cdot 7^{36}$$

3.- Trobeu tots el nombres enters iguals a la suma dels quadrats de les seues cifres.

Solució:

Com que $4 \times 9^2 = 324$ i 324 té tres xifres, és clar que els nombres buscats han de tenir menys de quatre xifres.

Sigui $N = 100x + 10y + z$ un d'aquests nombres. Ha de ser:

$$100x + 10y + z = x^2 + y^2 + z^2\,; \quad 0 < x < 10\,; \quad 0 \leq y < 10\,; \quad 0 \leq z < 10$$

Podem escriure

$$x(100 - x) + y(10 - y) = z(z - 1)$$

però el valor *mínim* de $x(100 - x)$ és 99 (per a $x = 1$), mentre que el valor *màxim* de $z(z - 1)$ és 72 (per a $z = 9$), cosa que implica que, en tot cas, $x = 0$ i el nombre no pot tenir tres xifres. La cosa queda en:

$$y(10 - y) = z(z - 1)\,; \quad 0 < y < 10\,; \quad 0 \leq z < 10$$

i càlculs simples de totes les possibilitats mostren l'absència de solucions. Per tant, els nombres demanats només poden ser d'una sola xifra i, òbviament, són 0 i 1.

4.-

i) Si n és un nombre natural i 2^{n+12}, i 2^n denaten la mesura d'un angle expresada en graus sexagesimals, demostreu que $\sin(2^{n+12}) = \sin(2^n)$ si $n \geq 3$.

ii) Trobeu el valor més petit de n per al qual l'expressió $\sin(2^n)$ pren el valor més gran possible

i) Tenim

$$\sin(2^{n+12}) = \sin(4096 \cdot 2^n) = \sin((11 \cdot 360 + 136) \cdot 2^n) = \sin(136 \cdot 2^n).$$

Aleshores $\sin(136 \cdot 2^n) = \sin(2^n)$ si $136 \cdot 2^n = 2^n + k \cdot 360$ o bé $136 \cdot 2^n = 180 - 2^n + k \cdot 360$, és a dir, $135 \cdot 2^n = k \cdot 360 \Leftrightarrow 2^n = k \frac{360}{135} = k \frac{8}{3}$ o bé $137 \cdot 2^n = k \cdot 360 \Leftrightarrow 2^n = k \cdot \frac{360}{137}$. El segon cas és impossible, i el primer es verifica si $k = 3, 2 \cdot 3, 2^2 \cdot 3, \ldots$

Si $k = 3$, $2^n = 8 \Rightarrow n = 3$, i per tant

$$\sin(2^{n+12}) = \sin(2^n) \quad \text{si} \quad n \geq 3$$

ii) Per **6.***i*, només hem de considerar $\sin(2^n)$ per a $n = 1, \ldots, 14$. De la següent taula,

n	2^n	$\sin(2^n)$
1	2	sin(2)
2	4	sin(4)
3	8	sin(8)
4	16	sin(16)
5	32	sin(32)
6	64	sin(64)
7	128	sin(52)
8	256	−
9	512	sin(28)
10	1024	−
11	2048	−
12	4096	sin(44)
13	8192	−
14	16384	−

on − indica que el corresponent sinus és negatiu, es dedueix que el valor més petit de n que fa $\sin(2^n)$ màxim és $n = 6$.

5.- Esbrineu si en el conjunt de nombres $\{1,2,3,.......10^9\}$ n'hi ha més nombres que contenen la cifra 9 o més que no la contenen.

Solució:

-En lloc dels nombres $1, 2, \ldots, 10^9$ podem considerar els nombres

$$0, 1, 2, \ldots, 999\,999\,999$$

o sigui, tots els nombres de nou xifres (posant zeros a l'esquerra dels nombres de menys de nou xifres). N'hi ha 10^9.

D'aquests, sense la xifra 9 n'hi ha 9^9. Ara bé,

$$\frac{10^9}{9^9} = \left(1 + \frac{1}{9}\right)^9 = 1 + 9 \cdot \frac{1}{9} + \cdots > 2.$$

Per tant, n'hi ha més amb la xifra 9 que sense.

6.- Trobeu el mínim nombre natural n que és múltiple de 3 i tal que, a més, $n+1$ és múltiple de 5, $n+2$ és múltiple de 7, $n+3$ és múltiple de 9 i $n+4$ és múltiple de 11.

Solució 1:

La condició que n sigui múltiple de 3 és redundant si imposem que $n+3$ sigui múltiple de 9, i per tant podem deixar-la de banda. La primera aparició d'un múltiple de 5 i un múltiple de 7 consecutius és 20, 21. Anem-hi sumant $5 \cdot 7 = 35$ les vegades que calgui (amb la qual cosa seguirem tenint un múltiple de 5 i un múltiple de 7 consecutius) fins que el nombre següent sigui un múltiple de 9. Així s'arriba, en quatre intents, a 160, 161, 162. Ara anem-hi sumant $5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$ fins a aconseguir que el nombre següent sigui un múltiple de 11. Després de cinc intents s'arriba a 1735, 1736, 1737, 1738, que és la solució mínima al problema plantejat.

La solució és $n = 1734$.

Solució 2: Observem que n ha de complir $n \equiv -1 \bmod 5$, $n \equiv -2 \bmod 7$, $n \equiv -3 \bmod 9$ i $n \equiv -4 \bmod 11$. Els residus es van incrementant en -1 i els mòduls en 2. Això ens permet multiplicar per 2 les quatre congruències (2 és primer amb tots els mòduls) i posar $2n \equiv -2 \equiv 3 \bmod 5$, $2n \equiv -4 \equiv 3 \bmod 7$, $n \equiv -6 \equiv 3 \bmod 9$ i $n \equiv -8 \equiv 3 \bmod 11$. És a dir, $2n - 3$ és un múltiple comú de 5, 7, 9, i 11, i per tant del mínim comú múltiple 3465. Tenim $2n - 3 = 3465k$, o bé $2n = 3465k + 3$ i per a $k = 1$ obtenim el mínim valor, que és $2n = 3468$, $n = 1734$.

-*Solució 3:* La solució pel mètode de les restes xineses s'obté plantejant el problema com el sistema d'equacions $n+1 \equiv 0 \text{ mod } 5$, $n+2 \equiv 0 \text{ mod } 7$, $n+3 \equiv 0 \text{ mod } 9$, $n+4 \equiv 0 \text{ mod } 11$. Això és el mateix que $n \equiv 4 \text{ mod } 5$, $n \equiv 5 \text{ mod } 7$, $n \equiv 6 \text{ mod } 9$, $n \equiv 7 \text{ mod } 11$. Les dues primeres equacions són equivalents a $n \equiv 19 \text{ mod } 35$. Aquesta i la tercera són equivalents a $n \equiv 159 \text{ mod } 315$. Aquesta i la quarta són equivalents a $n \equiv 1734 \text{ mod } 3465$. Aquesta última congruència expressa, de fet, el conjunt de totes les solucions del problema.

7.- Efectueu la divisió entera:

$2003^{2003} \,\big|\, \underline{2004\quad}$

Com que $2003 \equiv -1 \pmod{2004}$, serà $2003^{2003} \equiv (-1)^{2003} \equiv -1 \equiv 2003 \pmod{2004}$ i el residu R és 2003. El quocient Q serà

$$Q = \frac{2003^{2003} - 2003}{2004}.$$

Es pot donar una expressió diferent d'aquest quocient.

SOLUCIÓ 1:

Tenim

$$\frac{2003^{2003} - 2003}{2004} = 2003 \frac{2003^{2002} - 1}{2003 + 1}$$

i aquesta última fracció es pot escriure

$$\begin{aligned} \frac{2003^{2002} - 1}{2004} &= 2003^{2001} - 2003^{2000} + 2003^{1999} - \cdots + 2003 - 1 = \\ &= (2003^{2001} - 2003^{2000}) + (2003^{1999} - 2003^{1998}) + \cdots \\ &\quad \cdots + (2003^{3} - 2003^{2}) + (2003 - 1) = \\ &= 2002\,(2003^{2000} + 2003^{1998} + \cdots + 2003 + 1) \end{aligned}$$

de manera que el quocient és

$$Q = 2003 \cdot 2002\,(2003^{2000} + 2003^{1998} + \cdots + 2003^{2} + 1).$$

SOLUCIÓ 2:

Si operem en base 2003 la divisió resulta ser

$$10^{10} \,\big|\, \underline{\;11\;}$$

o sigui

$$1\overbrace{0000\ldots000}^{2003} \,\big|\, \underline{\;11\;} \qquad\qquad \begin{array}{l|l} \overbrace{10000\ldots00}^{1001\text{ parelles}}0 & \underline{\quad 11 \quad} \\ \;100 & \underbrace{\alpha0\alpha0\alpha\ldots\alpha0}_{1001} \\ \quad 100 & \\ \qquad \ldots & \\ \qquad\; 100 & \\ \qquad\quad 10 & \end{array}$$

on α és la xifra que correspon a 2002. El quocient és per tant $Q = \alpha0\ldots\alpha0 = \alpha(10\ldots10)$ que en base 10 serà

$$\begin{aligned} Q &= 2002\,(2003^{2001} + 2003^{1999} + \cdots + 2003^{1}) = \\ &= 2003 \cdot 2002\,(2003^{2000} + 2003^{1998} + \cdots + 2003^{2} + 1) \end{aligned}$$

8.- Trobeu els nombre natural més petit que siga divisible per 847 i que tinga totes les cifres iguals.

Primera solució.

Com que $847 = 7 \cdot 11^2$, el nombre buscat $N = \overbrace{aa\ldots a}^{n}$, amb $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, ha de ser divisible per 7 i per 11^2. Per tal que N sigui divisible per 11, cal que $n = 2k$, i en aquest cas serà $N/11 = \overbrace{0a\,0a\ldots 0a}^{k}$. Si aquest nombre ha de tornar a ser divisible per 11, ha de ser $k = \dot{\overline{11}}$. El nombre més petit que ho compleix és $n = 22$. Per tal que N sigui divisible per 7, ha de ser $a = 7$. El nombre buscat és

$$\overbrace{77\ldots 7}^{22} = 847 \cdot 91\,822\,736\,455\,463\,728\,191.$$

Segona solució.

Tenim que $\overbrace{aa\ldots a}^{n} = \dot{\overline{11^2}} \iff \overbrace{99\ldots 9}^{n} = \dot{\overline{11^2}}$, de manera que

$$\begin{aligned}\dot{\overline{11^2}} = 10^n - 1 = (11-1)^n - 1 = \\ 11^n - \binom{n}{1}11^{n-1} + \binom{n}{2}11^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}11 \cdot (-1)^{n-1} + (-1)^n - 1.\end{aligned}$$

Això obliga a que n sigui parell i resulta

$$11^{n-1} - \binom{n}{1}11^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-2}11 - n = \dot{\overline{11}}$$

o sigui que $n = \dot{\overline{11}}$. El valor de n més petit és 22. Finalment, i com en la primera solució, per tal que N sigui divisible per 7, ha de ser $a = 7$.

9.- Trobeu tots el nombres enters m, n, solucions de l'equació $9^m = 4n^2 + 1$.

Primera solució.

No pot ser $m < 0$ ja que el primer membre seria menor que 1 i el segon membre seria més gran o igual que 1.

Si $m = 0$ obtenim la solució $n = 0$.

Si $m > 0$, serà $9^m = \dot{3}$ i podem estudiar la igualtat mòdul 3. Tenim $0 \equiv 4n^2 + 1 \equiv n^2 + 1$, d'on $n^2 \equiv 2$ mòdul 3, i això és impossible, ja que mòdul 3 els únics quadrats són 0 i 1.

Segona solució.

Podem escriure l'equació en la forma

$$3^{2m} - 4n^2 = 1 \quad \text{o bé} \quad (3^m + 2n)(3^m - 2n) = 1.$$

Com que es tracta d'enters, les úniques possibilitats són

a) $3^m + 2n = 1$ i $3^m - 2n = 1$, d'on $3^m = 1$ i $m = 0$

b) $3^m + 2n = -1$ i $3^m - 2n = -1$, d'on $3^m = -1$, absurd.