

1.- Proveu que el nombre $55^{100} + 55^{101} + 55^{102}$ és múltiple de 13.

Solució:

$$55^{100} + 55^{101} + 55^{102} = 55^{100}(1 + 55 + 55^2)$$

$$55 \equiv 3 \pmod{13}$$

$$55^2 \equiv 3^2 \pmod{13}$$

$$\begin{aligned} 55^{100} + 55^{101} + 55^{102} &\equiv 55^{100}(1 + 55 + 55^2) \pmod{13} \equiv \\ &\equiv 55^{100}(1 + 3 + 9) \pmod{13} \equiv 0 \pmod{13} \end{aligned}$$

Per tant $55^{100} + 55^{101} + 55^{102}$ és múltiple de 13.

2.- Els nombres 7, 8, 9, 10 tenen la propietat que la suma del menor i el major és igual a la diferència entre els quadrats dels nombres del centre.
És certa aquesta propietat per a qualsevol quatre nombres consecutius?

Solució:

$$7 + 10 = 9^2 - 8^2$$

Siguin els nombres naturals consecutius, $n, n+1, n+2, n+3$

$$(n+2)^2 - (n+1)^2 = n^2 + 4n + 4 - (n^2 + 2n + 1) = 2n + 3 = n + (n+3)$$

Per tant, la propietat és certa.

3.- Demostreu que $n^7 - n$ és múltiple de 42.

Solució:

Recordem l'enunciat del teorema de Fermat

Si p és primer, aleshores, $a^p \equiv a \pmod{p}$

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$n^7 - n = n(n+1)(n-1)(n^2+n+1)(n^2-n+1)$$

Utilitzant el teorema de Fermat provarem que $n^7 - n$ és múltiple de 2, 3, 7.

$$\begin{aligned} n^7 - n &\equiv (n^2 - n)(n+1)(n^2+n+1)(n^2-n+1) \pmod{2} \equiv \\ &\equiv (n-n)(n+1)(n^2+n+1)(n^2-n+1) \pmod{2} \equiv 0 \pmod{2} \end{aligned}$$

Per tant $n^7 - n$ és múltiple de 2

$$\begin{aligned} n^7 - n &\equiv (n^3 - n)(n^2+n+1)(n^2-n+1) \pmod{3} \equiv \\ &\equiv (n-n)(n^2+n+1)(n^2-n+1) \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3} \end{aligned}$$

Per tant $n^7 - n$ és múltiple de 3

$$\begin{aligned} n^7 - n &\equiv (n^7 - n) \pmod{7} \equiv \\ &\equiv (n-n) \pmod{7} = 0 \pmod{7} \end{aligned}$$

Per tant $n^7 - n$ és múltiple de 7

Aleshores $n^7 - n$ és múltiple de $\text{mcm}(2,3,7) = 42$

4.- Demostreu que $\frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{n + 2}$ és divisible per 24.

Solució:

Efectuem la divisió i factoritzem el quocient:

$$\frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{n + 2} = (n - 2)(n - 1)n(n + 1).$$

Si tres nombres enters són consecutius, algun d'ells és múltiple de 3 aleshores,

$$\frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{n + 2} \text{ és múltiple de 3.}$$

Suposem que n és parell $n = 2k$:

$$\begin{aligned} \frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{n + 2} &= (n - 2)(n - 1)n(n + 1) = (2k - 2)(2k - 1)2k(2k + 1) = \\ &= 4(k - 1)k(2k - 1)(2k + 1) \end{aligned}$$

$k - 1$, k són consecutius aleshores, $(k - 1)k$ és parell.

Per tant, $\frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{n + 2}$ és múltiple de 8.

Aleshores, $\frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{n + 2}$ és múltiple de $3 \cdot 8 = 24$.

Suposem que n és imparell $n = 2k + 1$:

$$\begin{aligned} \frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{n + 2} &= (n - 2)(n - 1)n(n + 1) = (2k - 1)2k(2k + 1)(2k + 2) = \\ &= 4k(k + 1)(2k - 1)(2k + 1) \end{aligned}$$

k , $k + 1$ són consecutius aleshores, $k(k + 1)$ és parell.

Per tant, $\frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{n + 2}$ és múltiple de 8.

Aleshores, $\frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{n + 2}$ és múltiple de $3 \cdot 8 = 24$.

5.- Busqueu els nombres primers de la forma $n^4 + 4$ amb n nombre enter positiu.

Solució:

Factoritzem $n^4 + 4$.

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$$

A fi que $n^4 + 4$ siga nombre primer algun dels factors ha de ser 1.

Aleshores, $n^2 - 2n + 2 = 1$.

Resolent l'equació:

$$n = 1.$$

Si $n = 1$, aleshores, $1^4 + 4 = 5$ que és un nombre primer.

Aleshores, no hi ha cap nombre primer de la forma $n^4 + 4$ si $n \neq 1$, n nombre enter positiu.

6.- Demostreu que l'equació $3^a + 1 = 5^b + 7^c$ no té solucions enteres.

Solució:

Suposem que a, b, c són nombres enters solució de l'equació $3^a + 1 = 5^b + 7^c$.

$$3^a - 5^b = 7^c - 1.$$

$$7^c - 1 = (7 - 1)(7^{c-1} + 7^{c-2} + \dots + 7 + 1) = 2 \cdot 3(7^{c-1} + 7^{c-2} + \dots + 7 + 1)$$

Aleshores, $3^a - 5^b$ és múltiple de 3.

Per tant 5^b és múltiple de 3, la qual cosa és absurda.

Per tant $3^a + 1 = 5^b + 7^c$ no té solucions enteres.

7.-

- a) Trobeu tots els enters positius n tals que $2^n - 1$ és divisible per 7.
 b) Demostreu que no existeix cap enter positiu tal que $2^n + 1$ és divisible per 7.

Solució:

a)

n pot ser de les formes $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$

i) Suposem $n = 3k$.

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= 2^{3k} - 1 = (2^3)^k - 1 = (2^3 - 1) \left((2^3)^{k-1} + (2^3)^{k-2} + \dots + 2^3 + 1 \right) = \\ &= 7 \left((2^3)^{k-1} + (2^3)^{k-2} + \dots + 2^3 + 1 \right). \end{aligned}$$

Aleshores, si $n = 3k$, $2^n - 1$ és divisible per 7.

ii) Suposem $n = 3k + 1$.

$$2^n - 1 = 2^{3k+1} - 1 = 2 \cdot 2^{3k} - 1 = 2^{3k} + 2^{3k} - 1.$$

Per l'apartat (i) $2^{3k} - 1$ és múltiple de 7.

2^{3k} no és múltiple de 7.

Aleshores, si $n = 3k + 1$, $2^n - 1$ no és divisible per 7.

iii) Suposem $n = 3k + 2$.

$$2^n - 1 = 2^{3k+2} - 1 = 4 \cdot 2^{3k} - 1 = 3 \cdot 2^{3k} + 2^{3k} - 1.$$

Per l'apartat (i) $2^{3k} - 1$ és múltiple de 7.

$3 \cdot 2^{3k}$ no és múltiple de 7.

Aleshores, si $n = 3k + 2$, $2^n - 1$ no és divisible per 7.

b)

Anàlogament n pot ser de les formes $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$

iv) Suposem $n = 3k$.

$$2^n + 1 = 2^{3k} - 1 + 2$$

Per l'apartat (i) $2^{3k} - 1$ és múltiple de 7.

Aleshores, si $n = 3k$, $2^n + 1$ no és divisible per 7.

v) Suposem $n = 3k + 1$.

$$2^n + 1 = 2^{3k+1} + 1 = 2 \cdot 2^{3k} + 1 = 2^{3k} + 2^{3k} + 1 = 2^{3k} - 1 + 2^{3k} - 1 + 3.$$

Per l'apartat (i) $2^{3k} - 1$ és múltiple de 7.

Aleshores, si $n = 3k + 1$, $2^n + 1$ no és divisible per 7.

vi) Suposem $n = 3k + 2$.

$$2^n + 1 = 2^{3k+2} + 1 = 4 \cdot 2^{3k} + 1 = 4(2^{3k} - 1) + 5.$$

Per l'apartat (i) $2^{3k} - 1$ és múltiple de 7.

Aleshores, si $n = 3k + 2$, $2^n + 1$ no és divisible per 7.

8.- Determineu un nombre natural que té 2 factors primers i 8 divisors sabent que la suma dels seus divisors és 320.

Solució:

Siga N el nombre que cerquem $N = a^\alpha \cdot b^\beta$, on a, b són nombres primers distints de 1 i $\alpha, \beta \geq 1$.

El nombre divisors és $(\alpha + 1)(\beta + 1)$, aleshores,

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 8$$

Com que $\alpha, \beta \geq 1$, aleshores, $\alpha + 1 = 4, \beta + 1 = 2$ o bé $\alpha + 1 = 2, \beta + 1 = 4$.

Suposem $\alpha = 3, \beta = 1$

que $N = a^3 \cdot b$.

Calculem la suma dels divisors de N :

$$320 = 1 + a + a^2 + a^3 + b + ab + a^2b + a^3b$$

$$320 = \frac{a^4 - 1}{a - 1} + b \frac{a^4 - 1}{a - 1} = \frac{a^4 - 1}{a - 1} (1 + b)$$

Si $a \geq 5$, $\frac{a^4 - 1}{a - 1} (1 + b) > 320$.

a	b	$\frac{a^4 - 1}{a - 1} (1 + b)$
2	3	60
2	5	90
2	7	120
2	11	180
2	13	210
2	17	270
2	19	300
2	23	360
3	2	120
3	5	240
3	7	320

La solució és $N = 3^3 \cdot 7 = 189$.

9.- Siguen a, b dos nombre enters positius. Proveu que 19 divideix a $11a + 2b$ si i només si 19 divideix a $18a + 5b$

Solució:

(\Rightarrow)

Si $19 \mid 11a + 2b$, aleshores, $11a + 2b = 19n$, per tant,

$$11a = 19n - 2b.$$

$$\begin{aligned} 11(18a + 5b) &= 11 \cdot 18a + 55b = 18 \cdot 11a + 55b = \\ &= 18(19n - 2b) + 55b = 18 \cdot 19n - 19b = \\ &= 19(18n - b). \end{aligned}$$

Aleshores, $19 \mid 11(18a + 5b)$

Com que $\text{mcd}(19,11) = 1$, $19 \mid 18a + 5b$.

(\Leftarrow)

Si $19 \mid 18a + 5b$, aleshores, $18a + 5b = 19m$, per tant,

$$18a = 19m - 5b$$

$$\begin{aligned} 18(11a + 2b) &= 18 \cdot 11a + 36b = 11 \cdot 18a + 36b = \\ &= 11(19m - 5b) + 36b = 11 \cdot 19m - 19b = \\ &= 19(11m - b). \end{aligned}$$

Aleshores, $19 \mid 18(11a + 2b)$

Com que $\text{mcd}(19,18) = 1$, $19 \mid 11a + 2b$.

10.- Siga $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$.

- a) Proveu que $A_{n+3} - A_n$ és múltiple de 7.
 b) Calculeu la resta de dividir A_{2005} entre 7.

Solució:

a)

$$A_{n+3} = 2^{n+3} + 2^{2n+6} + 2^{3n+9}.$$

$$\begin{aligned} A_{n+3} - A_n &= 2^{n+3} + 2^{2n+6} + 2^{3n+9} - (2^n + 2^{2n} + 2^{3n}) = \\ &= 2^{n+3} - 2^n + 2^{2n+6} - 2^{2n} + 2^{3n+9} - 2^{3n} = \\ &= 2^n(2^3 - 1) + 2^{2n}(2^6 - 1) + 2^{3n}(2^9 - 1) = \\ &= 7 \cdot 2^n + 63 \cdot 2^{2n} + 511 \cdot 2^{3n} = \\ &= 7(2^n + 9 \cdot 2^{2n} + 73 \cdot 2^{3n}). \end{aligned}$$

Aleshores, $A_{n+3} - A_n$ és múltiple de 7.

b)

$$A_{2005} = 2^{2005} + 2^{4010} + 2^{6015}.$$

Aplicant divisions successives:

$$2005 = 5 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7 + 3$$

Estudiem la congruència mòdul 7 de 2^{2005} .

$$2^{2005} \equiv (2^5)^{7^3} (2^5)^{7^2} (2^6)^7 2^3 \pmod{7} \equiv$$

Aplicant el teorema de Fermat:

$$\begin{aligned} 2^{2005} &\equiv (2^5)^{7^3} (2^5)^{7^2} (2^6)^7 2^3 \pmod{7} \equiv 2^5 \cdot 2^5 \cdot 2^6 \cdot 2^3 \pmod{7} \equiv \\ &\equiv 2^{19} \pmod{7} \equiv (2^2)^7 2^5 \pmod{7} \equiv 2^2 \cdot 2^5 \pmod{7} \equiv 2^7 \pmod{7} \equiv 2 \pmod{7}. \end{aligned}$$

$$2^{4010} \equiv (2^{2005})^2 \pmod{7} \equiv 2^2 \pmod{7} \equiv 4 \pmod{7}$$

$$2^{6015} \equiv (2^{2005})^3 \pmod{7} \equiv 2^3 \pmod{7} \equiv 1 \pmod{7}.$$

$$A_{2005} = 2^{2005} + 2^{4010} + 2^{6015} \equiv 2 + 4 + 1 \pmod{7} = 0 \pmod{7}$$

A_{2005} és múltiple de 7 aleshores el residu és 0.

11.- Proveu que $3 \cdot 5^{2n+3} + 2^{3n+4}$ és múltiple de 17 per a tot n natural.

Solució:

Ho provarem per inducció.

Provem la propietat per a $n = 1$:

$$5^5 = 3125 \equiv 14 \pmod{17}, \quad 2^7 = 128 \equiv 9 \pmod{17}.$$

$$3 \cdot 5^{2n+3} + 2^{3n+4} \equiv 3 \cdot 14 + 9 \pmod{17} \equiv 51 \pmod{17} \equiv 0 \pmod{17}.$$

Aleshores $3 \cdot 5^{2n+3} + 2^{3n+4}$ és múltiple de 17.

Suposem que la propietat és certa per a $n = k$.

Suposem que $5^{2k+3} \equiv a \pmod{17}$, $2^{3k+4} \equiv b \pmod{17}$

Aleshores, $3 \cdot 5^{2k+3} + 2^{3k+4} \equiv 3a + b \pmod{17} \equiv 0 \pmod{17}$.

Per tant, $3a + b$ és múltiple de 17

Demostrem la propietat per a $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5^{2(k+1)+3} + 2^{3(k+1)+4} &= 3 \cdot 5^{2k+3} \cdot 5^2 + 2^{3k+4} \cdot 2^3 \equiv 3 \cdot a \cdot 25 + b \cdot 8 \pmod{17} \equiv \\ &\equiv 3 \cdot a \cdot 8 + b \cdot 8 \pmod{17} \equiv 8(3a + b) \pmod{17} \equiv 0 \pmod{17}. \end{aligned}$$

Per tant, $3 \cdot 5^{2(k+1)+3} + 2^{3(k+1)+4}$ és múltiple de 17.

Aleshores, $3 \cdot 5^{2n+3} + 2^{3n+4}$ és múltiple de 17 per a tot n natural.