

1.- Demostreu que $n^4 + 4$, amb $n \in \mathbb{N}$, només és primer quan $n = 1$.
Oposicions Catalunya 1993.

Solució:

$$\begin{aligned}n^4 + 4 &= (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 + 2) - (2n)^2 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2) = \\ &= ((n+1)^2 + 1)((n-1)^2 + 1)\end{aligned}$$

$$(n+1)^2 + 1 > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(n-1)^2 + 1 > 1 \quad \forall n > 1$$

$n^4 + 4$, és un nombre compost $\forall n > 1$.

Si $n = 1$, $n^4 + 4 = 5$ que és un nombre primer.

2.- Demostreu que $n(n^2 + 5)$ és divisible per 6 per a tot n natural.
Oposicions Catalunya 1999.

Solució:

Un nombre natural es divisible per 6 si és divisible per 2 i per 3.

Qualsevol nombre natural és de la forma $n = 2k$ o bé $n = 2k + 1$, on $k \in \mathbb{N}$.

Si $n = 2k$

$n(n^2 + 5) = 2k((2k)^2 + 5)$, aleshores, $n(n^2 + 5)$ és divisible per 2.

Si $n = 2k + 1$

$n(n^2 + 5) = (2k + 1)((2k + 1)^2 + 5) = (2k + 1)(4k^2 + 4k + 1 + 5) = 2(2k + 1)(2k^2 + 2k + 3)$,

aleshores, $n(n^2 + 5)$ és divisible per 2.

En qualsevol cas $n(n^2 + 5)$ és divisible per 2

Qualsevol nombre natural és de la forma $n = 3k$, $n = 3k + 1$, o bé $n = 3k + 2$ on $k \in \mathbb{N}$.

Si $n = 3k$

$n(n^2 + 5) = 3k((3k)^2 + 5)$, aleshores, $n(n^2 + 5)$ és divisible per 3.

Si $n = 3k + 1$

$n(n^2 + 5) = (3k + 1)((3k + 1)^2 + 5) = (3k + 1)(9k^2 + 6k + 1 + 5) = 3(3k + 1)(3k^2 + 2k + 2)$,

Si $n = 3k + 2$

$n(n^2 + 5) = (3k + 2)((3k + 2)^2 + 5) = (3k + 2)(9k^2 + 12k + 4 + 5) = 3(3k + 1)(3k^2 + 4k + 3)$,

aleshores, $n(n^2 + 5)$ és divisible per 3.

En qualsevol cas $n(n^2 + 5)$ és divisible per 3.

3.- Demostreu que un nombre natural és un quadrat perfecte si i només si té un nombre imparell de divisors.
 Oposicions Catalunya 1993.

Solució:

Siga n un nombre natural, aleshores, $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$ on p_i són nombres primers i $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

El nombre de divisors de n és $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_r + 1)$.

n és un quadrat perfecte si i només si α_i és parell $\forall i = 1, 2, \dots, r$.

Si i només si $\alpha_i + 1$ és imparell $\forall i = 1, 2, \dots, r$.

Si i només si $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_r + 1)$ és imparell.

4.- Demostreu que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solució:

Ho farem per inducció:

Si $n = 1$, $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$.

Suposem certa la relació per a $n = k$, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Demostrem la relació per a $n = k+1$:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &\stackrel{\text{HI}}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \end{aligned}$$

Factoritzem $2k^2 + 7k + 6$

$2k^2 + 7k + 6 = 0$, les solucions són: $k = -2, \frac{-3}{2}$

$$2k^2 + 7k + 6 = 2(k+2)\left(k + \frac{3}{2}\right) = (k+2)(2k+3) = ((k+1)+1)(2(k+1)+1).$$

Aleshores,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}.$$

Amb la qual cosa queda provada la proposició.

5.- Demostreu que per a tot n natural $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ és múltiple de 9.

Solució:

$$\begin{aligned} n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 &\equiv (3n^3 + 9n^2 + 15n + 9)(\text{mòd}9) \equiv \\ &\equiv (3n^3 + 15n)(\text{mòd}9) \equiv \\ &\equiv 3n(n^2 + 5)(\text{mòd}9) \end{aligned}$$

Demostrem que $n(n^2 + 5)$ és divisor de 3 per a tot n natural.

Qualsevol nombre natural és de la forma $n = 3k$, $n = 3k + 1$, o bé $n = 3k + 2$ on $k \in \mathbb{N}$.

Si $n = 3k$

$$n(n^2 + 5) = 3k((3k)^2 + 5). \quad n(n^2 + 5) \text{ és divisible per 3.}$$

Si $n = 3k + 1$

$$n(n^2 + 5) = (3k + 1)((3k + 1)^2 + 5) = (3k + 1)(9k^2 + 6k + 1 + 5) = 3(3k + 1)(3k^2 + 2k + 2),$$

Si $n = 3k + 2$

$$n(n^2 + 5) = (3k + 2)((3k + 2)^2 + 5) = (3k + 2)(9k^2 + 12k + 4 + 5) = 3(3k + 1)(3k^2 + 4k + 3),$$

aleshores, $n(n^2 + 5)$ és divisible per 3.

En qualsevol cas $n(n^2 + 5)$ és divisible per 3.

Aleshores, $n(n^2 + 5) = 3p$.

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \equiv 3n(n^2 + 5)(\text{mòd}9) \equiv 9p(\text{mòd}9) \equiv 0(\text{mòd}9).$$

Aleshores $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ és múltiple de 9.

6.- Demostreu que $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ és múltiple de 24.

Solució:

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

Vegem que $P = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ és divisible per 8 i per 3.

Factoritzem $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ amb la Regla de Ruffini:

$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = n(n+1)(n+2)(n+3)$$

P és producte de tres naturals consecutius, aleshores algun d'ells és múltiple de 3. Per tant P és múltiple de 3.

Provem que P és divisible per 8.

Qualsevol nombre natural és de la forma $n = 2k$ o bé $n = 2k + 1$, on $k \in \mathbb{N}$.

Si $n = 2k$

$$\begin{aligned} P &= n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = n(n+1)(n+2)(n+3) = 2k(2k+1)(2k+2)(2k+3) = \\ &= 4k(2k+1)(k+1)(2k+3) \end{aligned}$$

$k(k+1)$ és parell (producte de dos naturals consecutius), aleshores, $k(k+1) = 2m$.

Aleshores, $P = 4k(2k+1)(k+1)(2k+3) = 4 \cdot 2m(2k+1)(2k+3)$.

Per tant P és divisible per 8

Si $n = 2k + 1$

$$\begin{aligned} P &= n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n = n(n+1)(n+2)(n+3) = (2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4) = \\ &= 4(2k+1)(k+1)(2k+3)(k+2) \end{aligned}$$

$(k+1)(k+2)$ és parell (producte de dos naturals consecutius), aleshores,

$$(k+1)(k+2) = 2q.$$

Aleshores, $P = 4((2k+1)(k+1)(2k+3)(k+1)) = 4 \cdot 2q(2k+1)(2k+3)$.

Per tant P és divisible per 8.

Aleshores P és múltiple de $24 = \text{mcm}(8,3)$.

7.- Demostreu que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Solució:

Ho provarem per inducció:

$$\text{Si } n = 1, 1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}.$$

Suposem certa la relació per a $n = k$, $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$

Demostrem la relació per a $n = k+1$:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k(k+1)(k+1)(k+2) &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \\ &= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}. \end{aligned}$$

Amb la qual cosa queda provada la proposició.

8.- Demostreu que $4^n + 15n - 1$ és múltiple de 9 per a tot n natural.

Solució:

Ho provarem per inducció:

Si $n = 1$, $4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 18$ és múltiple de 9

Suposem certa la relació per a $n = k$, $4^k + 15k - 1$ és múltiple de 9:

$$4^k + 15k - 1 = 9p, \quad p \in \mathbb{N}, \quad 4^k = 9p - 15k + 1$$

Demostrem la relació per a $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 &= 4 \cdot 4^k + 15k + 14 \stackrel{HI}{=} 4(9p - 15k + 1) + 15k + 14 = \\ &= 36p - 45k + 18 = 9(4p - 5k + 2), \quad \text{que és múltiple de 9.} \end{aligned}$$

Per tant $4^n + 15n - 1$ és múltiple de 9, $\forall n \in \mathbb{N}$.

9.- Demostreu que $2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}$ és múltiple de 37 per a tot n natural.

Solució:

$$2^{n+5} \equiv 32 \cdot 2^n \pmod{37}.$$

$$3^{4n} \equiv (3^4)^n \pmod{37} \equiv 81^n \pmod{37} \equiv 7^n \pmod{37}.$$

$$5^{3n+1} \equiv 5 \cdot (5^3)^n \pmod{37} \equiv 5 \cdot 125^n \pmod{37} \equiv 5 \cdot 14^n \pmod{37}.$$

$$\begin{aligned} 2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1} &\equiv 32 \cdot 2^n \cdot 7^n + 5 \cdot 14^n \pmod{37} \equiv 32 \cdot 14^n + 5 \cdot 14^n \pmod{37} \equiv \\ &\equiv 37 \cdot 14^n \pmod{37} \equiv 0 \pmod{37}. \end{aligned}$$

Aleshores $2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}$ és múltiple de 37.

Nota: $81 = 2 \cdot 37 + 7$, $125 = 3 \cdot 37 + 14$.

10.- Demostreu que per a tot natural $A = 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$ és divisible per 1897.

Oposicions Múrcia 2002.

Solució:

$$1897 = 7 \cdot 271$$

Vegem que A és divisible per 7 i per 271

$$2903 = 7 \cdot 414 + 5$$

$$803 = 7 \cdot 114 + 5$$

$$464 = 7 \cdot 66 + 2$$

$$261 = 7 \cdot 37 + 2$$

$$A = 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n \equiv 5^n - 5^n - 2^n + 2^n \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}$$

Aleshores, A és divisible per 7.

$$2903 = 271 \cdot 10 + 193$$

$$803 = 271 \cdot 2 + 261$$

$$464 = 271 \cdot 1 + 193$$

$$A = 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n \equiv 193^n - 261^n - 193^n + 261^n \pmod{271} \equiv 0 \pmod{271}$$

Aleshores, A és divisible per 271.

Per tant A és divisible per $\text{mcm}(7,271) = 1897$.