

1.- Demostreu que per a tot natural  $n$ ,  $8n+7$  no és suma de 3 quadrats enters.

Solució:

Suposem que  $8n+7 = a^2 + b^2 + c^2$  on  $a, b, c \in \mathbb{N}$ .

Com que  $8n+7$  és imparell, només pot passar que  $a, b, c$  tots tres siguin imparells o bé dos parells i un imparell.

Suposem que  $a, b, c$  són tots tres imparells:

$$a = 2p+1, b = 2q+1, c = 2r+1.$$

$$8n+7 = (2p+1)^2 + (2q+1)^2 + (2r+1)^2.$$

$$8n+7 = 4p^2 + 4p+1 + 4q^2 + 4q+1 + 4r^2 + 4r+1. \text{ Simplificant:}$$

$$8n+4 = 4p^2 + 4p + 4q^2 + 4q + 4r^2 + 4r.$$

$$2n+1 = (p+1)p + (q+1)q + (r+1)r.$$

$(p+1)p$  és parell producte de dos naturals consecutius. Anàlogament,  $(q+1)q, (r+1)r$  són parells.

Per tant,  $2n+1$  és parell. La qual cosa és absurda.

Suposem que  $a$  i  $b$  són parells i  $c$  imparell.

$$a = 2p, b = 2q, c = 2r+1.$$

$$8n+7 = (2p)^2 + (2q)^2 + (2r+1)^2.$$

$$8n+7 = 4p^2 + 4q^2 + 4r^2 + 4r+1. \text{ Simplificant:}$$

$$8n+6 = 4p^2 + 4q^2 + 4r^2 + 4r.$$

$$4n+3 = 2(p^2 + q^2 + r^2 + r).$$

Aleshores,  $4n+3$  és parell. La qual cosa és absurda.

2.- Determineu els enters naturals tal que  $n^2 - 11n + 63$  és un quadrat perfecte.

Solució:

Siga  $n^2 - 11n + 63 = k^2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

$$4(n^2 - 11n + 63) = 4k^2.$$

$$4n^2 - 44n + 252 = 4k^2.$$

$$(2n - 11)^2 + 131 = (2k)^2.$$

$$(2k)^2 - (2n - 11)^2 = 131.$$

$$(2k + 2n - 11)(2k - 2n + 11) = 131.$$

131 és un nombre primer, aleshores poden passar dos casos:

1.-

$$2k + 2n - 11 = 1, 2k - 2n + 11 = 131.$$

Restant ambdues expressions:

$$4n - 22 = -130, \text{ aleshores, } n = -27.$$

2.-

$$2k + 2n - 11 = 131, 2k - 2n + 11 = 1.$$

Restant ambdues expressions:

$$4n - 22 = 130, \text{ aleshores, } n = 38.$$

3.-

a) Doneu un criteri per al càlcul mental del quadrat d'un nombre de dues xifres que tinga 5 en les unitats.

b) Demostreu que tots el termes de la successió 49, 4489, 444889, 44448889, ... són quadrats perfectes.

Oposicions Astúries 2004.

Solució:

a)

Siga  $a5_{(10)} = a \cdot 10 + 5$

$$(a5_{(10)})^2 = (a \cdot 10 + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = a(a+1)100 + 25$$

El criteri és: les dues últimes xifres són 25 i les altres el producte del que hi ha davant del del 5 multiplicat pel següent.

Exemple:

$$7^5 = 56\ 25$$

$$7 \times 8 = 56.$$

El criteri serveix per a nombres de més xifres acabats en 5.

Exemple:

$$105^2 = 110\ 25$$

$$10 \times 11 = 110.$$

b)

Siga el nombre  $N = 44 \dots^k \dots 488 \dots^{k-1} \dots 89$ .

$$\begin{aligned} N &= 4(10^{k-1} + 10^{k-2} + \dots + 1) \cdot 10^k + 8(10^{k-2} + 10^{k-3} + \dots + 1) \cdot 10 + 9 = \\ &= 4 \cdot \frac{10^k - 1}{10 - 1} \cdot 10^k + 8 \cdot \frac{10^{k-1} - 1}{10 - 1} \cdot 10 + 9 = \\ &= \frac{4}{9}(10^{2k} - 10^k) + \frac{8}{9}(10^k - 10) + 9 = \\ &= \frac{1}{9} \left( (2 \cdot 10^k)^2 + 2 \cdot 2 \cdot 10^k \cdot 1 + 1 \right) = \\ &= \left( \frac{2 \cdot 10^k + 1}{3} \right)^2. \end{aligned}$$

Per tant N és un quadrat perfecte.

4.- Determineu 2 nombres naturals tal que el seu màxim comú divisor siga 120 i la diferència dels seus quadrats siga 345600.  
Oposicions Andalusia 1998.

Solució:

Siguen a, b el nombres que cerquem.

Per ser  $\text{mcd}(a, b)=120$

$a = 120p$ ,  $b = 120q$  tal que  $\text{mcd}(p, q)=1$  Suposem  $p > q$ .

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$345600 = 2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

$$345600 = a^2 - b^2 = 120^2(p^2 - q^2) = 120^2(p + q)(p - q)$$

$$2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = (2^3 \cdot 3 \cdot 5)^2(p + q)(p - q)$$

Simplificant:

$$2^3 \cdot 3 = (p + q)(p - q)$$

$p + q$ ,  $p - q$  divideixen a 24.

Les possibilitats de p i q (tenint en compte que  $p > q$ ) són:

$$\begin{cases} p - q = 1 \\ p + q = 24 \end{cases}, \begin{cases} p - q = 2 \\ p + q = 12 \end{cases}, \begin{cases} p - q = 3 \\ p + q = 8 \end{cases}, \begin{cases} p - q = 4 \\ p + q = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p - q = 1 \\ p + q = 24 \end{cases} \text{ no té solució en els nombres naturals.}$$

$$\begin{cases} p - q = 2 \\ p + q = 12 \end{cases}, \begin{cases} p = 7 \\ q = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p - q = 3 \\ p + q = 8 \end{cases}, \text{ no té solució en els nombres naturals.}$$

$$\begin{cases} p - q = 4 \\ p + q = 6 \end{cases}, \begin{cases} p = 5 \\ q = 1 \end{cases}$$

5.- L'associació "Amics de les Matemàtiques" convida tots els anys, a tots els seus afiliats al congrés anual.

Aquests any, exactament el 27'18181818..% dels assistents eren dones, el 55'55555..% eren majors de 30 anys i el 37% portaven algun llibre de matemàtiques. Sabent que el nombre d'afiliats no és major de 15000, calculeu el nombre d'assistents al congrés.

Oposicions de Cantàbria 2004.

Solució:

$$27'18\% = \frac{2718 - 27}{9900} = \frac{299}{1100}$$

$$55'5\% = \frac{555 - 55}{900} = \frac{5}{9}$$

$$37\% = \frac{37}{100}$$

Siga  $x$  = nombre d'assistents al congrés .

El nombre de dones és  $\frac{299}{1100}x$

El nombre de majors de 30 és anys és  $\frac{5}{9}x$

El nombre de persones que porten llibre és  $\frac{37}{100}x$  .

Aleshores,  $x$  és múltiple de 1100, 9 i 100.  $\text{mcm}(1100, 9, 100) = 11 \cdot 9 \cdot 100$

Per tant,  $x = 11 \cdot 9 \cdot 100 \cdot a$ ,  $a \in \mathbb{N}$ .

$$x \leq 15000$$

$$9900a \leq 15000$$

L'únic nombre natural que satisfà la inequació és  $a = 1$ .

El nombre d'assistents al congrés és de 9900 persones.

6.- Demostreu que l'última xifra decimal de  $2^{2^n} + 1$  és 7 per a  $n > 1$ .  
Oposicions Àvila 1998.

Solució:

Ho provarem per inducció.

Si  $n = 2$

$2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$ . És a dir l'última xifra de  $2^{2^2}$  és 6.

Suposem que per a  $n = k$  l'última xifra de  $2^{2^k}$  és 6.

Per tant,  $2^{2^k} = a \cdot 10 + 6$  on  $a \in \mathbb{N}$ .

Provem la propietat per a  $n = k + 1$ :

$$2^{2^{k+1}} = 2^{2^k \cdot 2} = (2^{2^k})^2 =$$

Aplicant la hipòtesi d'inducció:

$$2^{2^{k+1}} = (2^{2^k})^2 = (10a + 6)^2 = 100a^2 + 120a + 36 = (10a^2 + 12a + 3)10 + 6.$$

Per tant, l'última xifra de  $2^{2^{k+1}}$  és 6.

Aleshores l'última xifra decimal de  $2^{2^n} + 1$  és 7.

7.- Donada la següent configuració de nombres naturals

			1			
		2	3	4		
	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16
....	....	....	....	....	....	....

Determineu la suma dels nombres situats en la  $n$ -èsima fila.

Oposicions Andalusia 2004.

Solució:

Els primers elements de les files són 1, 2, 5, 10, 17

Que són els elements següents dels quadrats perfectes començant en 0

El primer element de la fila  $n$  és  $(n-1)^2 + 1$ .

En cada fila hi ha  $2n-1$  nombres naturals consecutius.

Aleshores l'últim nombre de la fila  $n$  és  $(n-1)^2 + 1 + 2n - 2 = n^2$

La suma de tots els nombres de la fila  $n$  (suma d'una progressió aritmètica de primer terme  $(n-1)^2 + 1$ , darrer terme  $n^2$  i amb  $2n-1$  sumands) és:

$$S = \frac{(n-1)^2 + 1 + n^2}{2} (2n-1) = (n^2 - n + 1)(2n-1).$$

8.- Determineu el menor nombre en base 11 el producte del qual per 9 s'escriu en aquest sistema de numeració utilitzant només la xifra 5.  
Oposicions Àvila 1998.

Solució:

Els sistema de numeració de base 11 té els símbols següents

$0_{(11)} \equiv 0$ ,  $1_{(11)} \equiv 1$ ,  $2_{(11)} \equiv 2$ ,  $3_{(11)} \equiv 3$ ,  $4_{(11)} \equiv 4$ ,  $5_{(11)} \equiv 5$ ,  $6_{(11)} \equiv 6$ ,  $7_{(11)} \equiv 7$ ,  $8_{(11)} \equiv 8$ ,  
 $9_{(11)} \equiv 9$ ,  $A_{(11)} \equiv 10$

Volem un nombre  $p_{(11)}$  tal que  $555\dots\dots 5_{(11)}^{(n+1)} = 9 \cdot p_{(11)}$

$$555\dots\dots 5_{(11)}^{(n+1)} = 5 + 5 \cdot 11 + 5 \cdot 11^2 + \dots + 5 \cdot 11^n$$

Aplicant la suma dels n termes d'una progressió geomètrica de raó 11 i primer terme 5:

$$555\dots\dots 5_{(11)}^{(n+1)} = 5 + 5 \cdot 11 + 5 \cdot 11^2 + \dots + 5 \cdot 11^n = \frac{5 - 5 \cdot 11^{n+1}}{1 - 11} =$$

$$= \frac{5(11^{n+1} - 1)}{10} = \frac{11^{n+1} - 1}{2}.$$

$$\frac{11^{n+1} - 1}{2} = 9 \cdot p_{(11)}, \text{ per tant } \frac{11^{n+1} - 1}{2} \text{ és múltiple de } 9.$$

Aleshores,  $11^{n+1} - 1$  és múltiple de 9.

O bé  $11^{n+1} \equiv 1 \pmod{9}$ .

Calculem el primer n natural tal que  $11^{n+1} \equiv 1 \pmod{9}$ .

$$11^2 \equiv 2^2 \pmod{9} \equiv 4 \pmod{9}$$

$$11^3 \equiv 2^3 \pmod{9} \equiv 8 \pmod{9}$$

$$11^4 \equiv 2^4 \pmod{9} \equiv 7 \pmod{9}$$

$$11^5 \equiv 2^5 \pmod{9} \equiv 5 \pmod{9}$$

$$11^6 \equiv 2^6 \pmod{9} \equiv 1 \pmod{9}$$

Aleshores, el primer natural que ho aconpleix és  $n = 5$ .

$$555555_{(11)} = 9 \cdot p_{(11)}$$

Calculem  $p_{(11)}$ :

$$555555_{(11)} \equiv 885780.$$

$$555555_{(11)} \equiv 9 \cdot 98420.$$

Amb divisions successives per 11 passem el nombre 98420 a base 11.

$$\begin{array}{r} 98420 \\ 3 \overline{) 11} \\ \underline{33} \phantom{00} \\ 8947 \\ 4 \overline{) 11} \\ \underline{44} \phantom{00} \\ 813 \\ 10 \overline{) 11} \\ \underline{11} \phantom{00} \\ 73 \\ 7 \overline{) 11} \\ \underline{77} \phantom{00} \\ 6 \end{array}$$

$$98420 \equiv 67A43_{(11)}.$$

Per tant:

$$555555_{(11)} = 9 \cdot 67A43_{(11)}.$$

9.- Determineu els enters  $a, b, c$  (no tots iguals) tal que  $a + b + c = 2001$ ,  $a, b, c$  estan en progressió aritmètica en aquest ordre i  $a + b, b + c, c + a$  estan en progressió geomètrica en aquest ordre.

Solució:

Si  $a, b, c$  estan en progressió aritmètica  $b - a = c - b$ .

Si  $a + b, b + c, c + a$  estan en progressió geomètrica  $\frac{b+c}{a+b} = \frac{c+a}{b+c}$ .

Considerem el sistema format per les 3 equacions:

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 2001 \\ b - a = c - b \\ \frac{b+c}{a+b} = \frac{c+a}{b+c} \end{array} \right. \quad \text{les solucions del qual són} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 667 \\ b = 667 \\ c = 667 \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 4669 \\ b = 667 \\ c = -3335 \end{array} \right.$$

La solució del problema és la segona.

En aquest cas:

La diferència de la progressió aritmètica és  $d = 667 - 4669 = -4002$ .

La raó de la progressió geomètrica és  $r = \frac{667 - 3335}{4669 + 667} = -\frac{1}{2}$ .

10.- Siguen A, B, C enters positius en progressió aritmètica tal que  $A^\circ < B^\circ < C^\circ < 180^\circ$ . Si  $\sin A^\circ + \sin B^\circ = \sin C^\circ$  i  $\cos A^\circ - \cos B^\circ = \cos C^\circ$ , calculeu els valors de A, B, C.

Solució:

Per estar A, B, C en progressió aritmètica:

$$A^\circ = B^\circ - d^\circ, \text{ i } C^\circ = B^\circ + d^\circ. \quad 0^\circ \leq d^\circ < 90^\circ$$

Per hipòtesi:

$$\sin A^\circ + \sin B^\circ = \sin C^\circ$$

$$\sin(B^\circ - d^\circ) + \sin B^\circ = \sin(B^\circ + d^\circ)$$

$$\sin B^\circ \cos d^\circ - \sin d^\circ \cos B^\circ + \sin B^\circ = \sin B^\circ \cos d^\circ + \sin d^\circ \cos B^\circ$$

$$\sin B^\circ = 2 \cdot \sin d^\circ \cos B^\circ \quad (1)$$

$$\cos A^\circ - \cos B^\circ = \cos C^\circ$$

$$\cos(B^\circ - d^\circ) - \cos B^\circ = \cos(B^\circ + d^\circ)$$

$$\cos B^\circ \cos d^\circ + \sin B^\circ \sin d^\circ - \cos B^\circ = \cos B^\circ \cos d^\circ - \sin B^\circ \sin d^\circ$$

$$\cos B^\circ = 2 \sin B^\circ \sin d^\circ \quad (2)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):

$$\sin B^\circ = 2 \cdot \sin d^\circ \cdot 2 \sin B^\circ \sin d^\circ.$$

$$\sin^2 d^\circ = \frac{1}{4} \quad 0^\circ \leq d^\circ < 90^\circ$$

Aleshores,  $\sin d^\circ = \frac{1}{2}$  ja que  $0^\circ \leq d^\circ < 90^\circ$ . Per tant  $d^\circ = 30^\circ$ .

Substituint en (1)

$$\sin B^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cos B^\circ$$

$$\operatorname{tg} B^\circ = 1, \text{ aleshores, } B^\circ = 45^\circ.$$

$$\text{Aleshores, } A = 45 - 30 = 15, \quad B = 45, \quad C = 45 + 30 = 75$$