1.- Demostreu que $\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\dots\dots\dots\dots+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}$ per a tot n natural.

Oposicions València 2003.

Solució:

Siga $k\geq 1$.

$$\frac{1}{(2k+1)^2}<\frac{1}{(2k+1)^2-1}=\frac{1}{2k(2k+2)}=\frac{1}{4}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}$$

$$1=A(k+1)+Bk$$

$$1=(A+B)k+A$$

Aleshores, $\begin{cases}A=1\\A+B=0\end{cases}$, resolent el sistema, $\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}$.

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)^2}<\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots\dots\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{4}.$$

2.- Siguen p, q, r tres nombres naturals tals que la suma $p^3+q^3+r^3$ és múltiple de 9. Demostreu que almenys un dels 3 nombres p, q, r és múltiple de 3.
Oposicions Madrid 2002.

Solució:
Vegem que si p, q, r no són 0múltiples de 3 aleshores $p^3+q^3+r^3$ no és múltiple de 9.

Suposem que p, q, r no són múltiple de 3, aleshores són de la forma:
$p=3a+i$, $i=1,2$
$q=3b+j$, $j=1,2$
$r=3c+k$, $k=1,2$

$$p^3+q^3+r^3=(3a+i)^3+(3b+j)^3+(3c+k)^3=$$
$$=27a^2+27a^2i+9ai^2+i^3+27b^3+27b^2j+9bj^2+j^3+27c^3+27c^2k+9ck^2+k^3.$$

$p^3+q^3+r^3 \equiv i^3+j^3+k^3 (\text{mòd} 9)$, $i, j, k=1, 2$.
Poden passar 4 casos:
Tots $i, j, k=1$, aleshores, $p^3+q^3+r^3 \equiv i^3+j^3+k^3 (\text{mòd} 9) \equiv 3 (\text{mòd} 9)$.

Dos siguen 1 i l'altre 2, aleshores, $p^3+q^3+r^3 \equiv i^3+j^3+k^3 (\text{mòd} 9) \equiv 1 (\text{mòd} 9)$.

Dos siguen 2 i l'altre 1, aleshores, $p^3+q^3+r^3 \equiv i^3+j^3+k^3 (\text{mòd} 9) \equiv 8 (\text{mòd} 9)$.

Tots $i, j, k=2$, aleshores, $p^3+q^3+r^3 \equiv i^3+j^3+k^3 (\text{mòd} 9) \equiv 6 (\text{mòd} 9)$.

En tots 4 casos $p^3+q^3+r^3$ no és múltiple de 9.

Aleshores, si $p^3+q^3+r^3$ és múltiple de 9 almenys un dels 3 nombres p, q, r és múltiple de 3.

3.- Considerem la taula:

1
2, 3, 4
3, 4, 5, 6, 7
4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Demostreu que la suma de cada fila és un quadrat d'un nombre imparell.

Solució:

En la fila n-èsima és trobem els nombres naturals,

$n, n+1, n+2, \ldots\ldots, 3n-2$ en total hi ha $2n-1$ nombres.

La suma de tots és la suma d'una progressió aritmètica de primer terme n, darrer terme $3n-2$ i un total de $2n-1$ termes:

$$S_n = \frac{n+3n+2}{2}(2n-1) = (2n-1)(2n-1) = (2n-1)^2 .$$

Notem que és un quadrat del nombre imparell $2n-1$.

4.- Proveu que $N = n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ és múltiple de 3 per a tot n natural.

Solució:
Ho demostrarem per inducció completa.
Demostrem-ho per a $n = 1$

$1^3 + 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 12 \equiv 0(\text{mòd}3)$

Suposem que la propietat és certa per a $n = k$, $k^3 + 3k^2 + 5k + 3 \equiv 0(\text{mòd}3)$.

Demostrem la propietat per a $n = k + 1$.

$$(k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1) + 3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 5k + 5 + 3 =$$
$$= k^3 + 3k^2 + 5k + 3 + 3(n^2 + 3n + 3) \underset{HI}{\equiv} 0(\text{mòd}3).$$

5.- Demostreu que si el nombre natural $p = abc_{(10}$ és divisible per 37, aleshores els nombres $q = bca_{(10}$, $r = cab_{(10}$ són divisibles per 37.

Solució:
Si $p = abc_{(10}$ és divisible per 37, $100a + 10b + c = 37k$, $k \in N$.

$$q = b100 + c10 + a = 10(b10 + c) + a = 10(100a + b10 + c) - 999a = 10 \cdot 37k + 37 \cdot 27a =$$
$= 37(10k - 27a)$, aleshores, q és múltiple de 37.

$$r = c100 + a10 + b = 100(100a + 10b + c) - 999b - 9990a = 100 \cdot 37k - 37 \cdot 27b - 37 \cdot 270a =$$
$= 37(100k - 27b - 270a)$, aleshores, r és múltiple de 37.

6.- Demostreu la següent desigualtat:

$\text{tg}\, n\alpha > n \cdot \text{tg}\alpha$, si $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4(n-1)}$ i n és un natural $n \neq 1$.

Demostració: per inducció:
Siga $n = 2$.

Siga α tal que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$, aleshores, $\text{tg}\alpha < \text{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$.

$$\text{tg}2\alpha - 2 \cdot \text{tg}\alpha = \frac{2 \cdot \text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha} - 2\text{tg}\alpha = 2 \cdot \text{tg}\alpha\left(\frac{\text{tg}^2\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}\right) > 0 .$$

Aleshores, $\text{tg}2\alpha > 2 \cdot \text{tg}\alpha$ si s'acompleix $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$.

Suposem que s'acompleix la proposició per a $n = k$, és a dir,

$\text{tg}\, k\alpha > k \cdot \text{tg}\alpha$, si $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4(k-1)}$.

Demostrem la propietat per a $n = k+1$.

Siga $n = k+1$, siga $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4k}$.

$$\text{tg}((k+1)\alpha) = \frac{\text{tgk}\alpha + \text{tg}\alpha}{1-\text{tgk}\alpha \cdot \text{tg}\alpha} \underset{\text{HI}}{>} \frac{k \cdot \text{tg}\alpha + \text{tg}\alpha}{1-\text{tgk}\alpha \cdot \text{tg}\alpha} = \frac{(k+1) \cdot \text{tg}\alpha}{1-\text{tgk}\alpha \cdot \text{tg}\alpha} .$$

$0 < \text{tgk}\alpha < \text{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$.

$0 < \text{tg}\alpha < 1$.

$1 - \text{tgk}\alpha \cdot \text{tg}\alpha < 1$.

Aleshores, $\text{tg}((k+1)\alpha) > (k+a)\text{tg}\alpha$.

7.- Demostreu que la fracció $\frac{21n+4}{14n+3}$ és irreductible per a qualsevol n natural.

Solució 1: Samuel L. Greitzer.
Demostrem que si $g > 0$ és factor del numerador i denominador $g = 1$.

$21n + 4 = gA$ tal que $A \in N$
$14n + 3 = gB$ tal que $B \in N$
Multipliquem la primera expressió per 2 i la segona per 3 i restem-les:
$g(2A - 3B) = -1$
Aleshores, g divideix a –1.
Aleshores, $g = 1$

Solució 2: Apliquem l'algoritme d'euclides i calculem el mcd dels polinomis enters $21n + 4$, $14n + 3$

	1	2
$21n+4$	$14n+3$	$7n+1$
$7n+1$	1	

Aleshores $mcd(21n + 4, 14n + 3) = 1$, aleshores la fracció és irreductible.

8.- Siguen p, q dos nombres naturals tal que

$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+........-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}\ .$$

Demostreu que p és divisible per 1979.

Solució de Murray S. Klamkin:

Els termes negatius tenen denominadors parells:

$$-\frac{1}{2k}=\frac{1}{2k}-\frac{1}{k}$$

Aleshores,

$$\frac{p}{q}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+........\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+.....+\frac{1}{1318}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+........\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+.....+\frac{1}{659}\right)=$$

$$=\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+......+\frac{1}{1319}$$

$$\frac{1}{660+j}+\frac{1}{1319-j}=\frac{1979}{(660+j)(1318-j)}$$

$$\frac{p}{q}=\left(\frac{1}{660}+\frac{1}{1319}\right)+\left(\frac{1}{661}+\frac{1}{1218}\right).....+\left(\frac{1}{989}+\frac{1}{990}\right)=$$

$$=\frac{1979}{660\cdot 1319}+\frac{1979}{661\cdot 1318}+.......+\frac{1979}{989\cdot 990}=$$

$$=1979\frac{r}{s}$$

s és el producte de tots els enters de 660 fins 1319.

1979 és un nombre primer.

$$\frac{p}{q}=1979\frac{r}{s}$$

$$ps=1979rq$$

Com 1979 no divideix a s, aleshores, 1979 divideix a p.

9.- Determineu el major nombre natural n a fi que $(n+1)\left(n^4+2n\right)+3\left(n^3+57\right)$ siga divisible per n^2+2.

Solució:

$(n+1)\left(n^4+2n\right)+3\left(n^3+57\right)=n^5+n^4+3n^3+2n^2+2n+171$.

$$\frac{n^5+n^4+3n^3+2n^2+2n+171}{n^2+2}=n^3+n^2+n+\frac{171}{n^2+2}.$$

Aleshores, $n^2+2\le 171$.

Vegem el major valor de n a fi que 171 és múltiple de n^2+2.

$n^2\le 169$.

Aleshores, $n=13$ ja que $\frac{171}{13^2+2}=1$.

10.- Siguen $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ els termes d'una progressió aritmètica s'acompleix:

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \frac{1}{a_3 \cdot a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{n-1}{a_1 \cdot a_n}.$$

Solució:

Siga $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ els termes d'una progressió aritmètica de diferència d

$a_k = a_1 + (k-1)d$, $\forall k = 1,2,3,\ldots n$

$a_{k+1} = a_k + d$

Ho provarem per inducció.

Per a $n = 2$, és trivial, $\dfrac{1}{a_1 \cdot a_2} = \dfrac{2-1}{a_1 \cdot a_2}$

Suposem que la propietat s'acompleix per a $n = k$, aleshores,

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \frac{1}{a_3 \cdot a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1} \cdot a_k} = \frac{k-1}{a_1 \cdot a_k}$$

Provem que la propietat s'acompleix per a $n = k+1$.

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \frac{1}{a_3 \cdot a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1} \cdot a_k} + \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} \underset{HI}{=} \frac{k-1}{a_1 \cdot a_k} + \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} =$$

$$= \frac{(k-1)a_{k+1} + a_1}{a_1 \cdot a_k \cdot a_{k+1}} =$$

$$= \frac{(k-1)(a_k + d) + a_1}{a_1 \cdot a_k \cdot a_{k+1}} =$$

$$= \frac{(k-1)a_k + (k-1)d + a_1}{a_1 \cdot a_k \cdot a_{k+1}} =$$

$$= \frac{(k-1)a_k + a_k}{a_1 \cdot a_k \cdot a_{k+1}} =$$

$$= \frac{k \cdot a_k}{a_1 \cdot a_k \cdot a_{k+1}} =$$

$$= \frac{k}{a_1 \cdot a_{k+1}}$$