

Problemes Nombres 6

1.- Demostreu que $\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}$ per a tot n natural.

Oposicions València 2003.

2.- Siguen p, q, r tres nombres naturals tals que la suma $p^3 + q^3 + r^3$ és múltiple de 9.

Demostreu que almenys un dels 3 nombres p, q, r és múltiple de 3.

Oposicions Madrid 2002.

3.- Considerem la taula:

1						
2,	3,	4				
3,	4,	5,	6,	7		
4,	5,	6,	7,	8,	9,	10

Demostreu que la suma de cada fila és un quadrat d'un nombre imparell.

4.- Proveu que $N = n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ és múltiple de 3 per a tot n natural.

5.- Demostreu que si el nombre natural $p = abc_{(10)}$ és divisible per 37, aleshores els nombres $q = bca_{(10)}$, $r = cab_{(10)}$ són divisibles per 37.

6.- Demostreu la següent desigualtat:

$tg n\alpha > n \cdot tg\alpha$, si $0 < \alpha < \frac{\pi}{4(n-1)}$ i n és un natural $n \neq 1$.

7.- Demostreu que la fracció $\frac{21n+4}{14n+3}$ és irreductible per a qualsevol n natural.

8.- Siguen p, q dos nombres naturals tal que

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Demostreu que p és divisible per 1979.

9.- Determineu el major nombre natural n a fi que $(n+1)(n^4 + 2n) + 3(n^3 + 57)$ siga divisible per $n^2 + 2$.

10.- Siguen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ els termes d'una progressió aritmètica s'acompleix:

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \frac{1}{a_3 \cdot a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{n-1}{a_1 \cdot a_n}.$$