

1.- La suma de dos nombres naturals és 371 i el quocient entre el seu mínim comú múltiple i el seu màxim comú divisor és 430. Calculeu-los.
Olímpiada espanyola XXVI. Districte València.

Solució:

Siguen m, n els nombres naturals que cerquem.

Siguen M i D el seu mínim comú múltiple i el seu màxim comú divisor.

Per hipòtesi:

$$m + n = 371 \quad (1)$$

$$\frac{M}{D} = 430 = 2 \cdot 5 \cdot 43 \quad (2)$$

Cap factor de m o n pot ser 43^k , $k \geq 2$ ja que $43^2 = 1764 > 371 = m + n$.
43 no pot ser factor comú de m i n .

Suposem que és factor de m , $m = 43 \cdot p$, $p = 1,2,3,4,5,6,7,8$ ja que $43 \cdot 9 = 387 > 371$.

Si $p = 8 = 2^3 \vee p = 4 = 2^2$, n seria parell i per hipòtesi $m + n$ és imparell. Aleshores, $p = 1,2,3,5,6,7$.

Si $m = 43 \cdot 7 = 301$, $n = 70 = 7 \cdot 10$. Aleshores, $\text{mcd}(301,70) = 7$, $\text{mcm}(301,70) = 3010$.
Que compleix les condicions del problema.

Si $m = 43 \cdot 6 = 258$, $n = 113$.
Aleshores, $\text{mcd}(258,113) = 1$, $\text{mcm}(258,113) = 258 \cdot 113$.
Que no compleix la condició (2).

Si $m = 43 \cdot 5 = 215$, $n = 156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$.
Aleshores, $\text{mcd}(215,156) = 1$, $\text{mcm}(215,156) = 215 \cdot 156$.
Que no compleix la condició (2).

Si $m = 43 \cdot 3 = 129$, $n = 242 = 2 \cdot 11^2$.
Aleshores, $\text{mcd}(129,242) = 1$, $\text{mcm}(129,242) = 129 \cdot 242$.
Que no compleix la condició (2).

Si $m = 43 \cdot 2 = 86$, $n = 285 = 3 \cdot 5 \cdot 19$.
Aleshores, $\text{mcd}(86,285) = 1$, $\text{mcm}(86,285) = 86 \cdot 285$.
Que no compleix la condició (2).

Si $m = 43 \cdot 1$, $n = 328 = 2^3 \cdot 41$.
Aleshores, $\text{mcd}(43,328) = 1$, $\text{mcm}(43,328) = 43 \cdot 328$.
Que no compleix la condició (2).

2.- Calculeu un nombre natural N de cinc xifres distintes tal que la suma de les variacions ternàries que poden formar-se amb les seues xifres siga igual a N.

Solució:

$$\text{Siga } N = abcde_{(10)} = a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e .$$

La suma de les variacions ternàries és:

$$(a + b + c + d + e)(10^2 + 10 + 1)12 = N \quad (1)$$

Com que les xifres són distintes:

$$15 \leq a + b + c + d + e \leq 35 \quad (2)$$

De la igualtat (1):

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 37(a + b + c + d + e) = N$$

Aleshores, N és múltiple de 9.

Aplicant el criteri de divisibilitat per 9 i tenint en compte (2)

$$a + b + c + d + e = 18, \text{ o bé } a + b + c + d + e = 27$$

$$\text{Si } a + b + c + d + e = 18$$

$$N = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 37 \cdot 18 = 23976 .$$

$$\text{Si } a + b + c + d + e = 27$$

$$N = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 37 \cdot 27 = 35964 .$$

3.- Tenim una pila de taronges de base rectangular, la qual es forma col·locant una taronja en un buit que deixen quatre taronges de la capa inferior, continuant fins arribar a una capa formada per una sola fila. Si la capa inferior té $m \times n$ taronges ($m > n$).

Quantes taronges té tota la pila. Nota: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solució:

Si la capa inferior té $m \times n$ taronges la següent en té $(m-1) \times (n-1)$ i així

successivament. Aleshores el total de taronges de la pila és:

$$(mn) + ((m-1)(n-1)) + ((m-2)(n-2)) + \dots + ((m-(n-2))(n-(n-2))) + ((m-(n-1))1) =$$

$$= (mn) + (mn+1-(m+n)) + (mn+4-2(m+n)) + \dots + (mn+(n-2)^2 - (n-2)(m+n)) +$$

$$+ (mn+(n-1)^2 - (n-1)(m+n)) =$$

$$= n(mn) + (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) - (m+n)(1+2+\dots+(n-1)) =$$

$$= mn^2 + \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} - (m+n)\frac{n(n-1)}{2} =$$

$$= mn^2 + n(n-1)\left(\frac{2n-1}{6} - \frac{m+n}{2}\right) =$$

$$= mn^2 + n(n-1)\frac{-3m-n-1}{6}$$

4.- Demostreu que per a to n natural $2^{2^{6n+2}} + 3$ és múltiple de 19.

Solució:

Demostrem-ho per inducció completa:

Si $n = 1$

$$2^{2^8} = 16^{2^6} \equiv (-3)^{2^6} \pmod{19} \equiv 81^{2^4} \pmod{19} \equiv 5^{2^4} \pmod{19} \equiv 25^{2^3} \pmod{19} \equiv 6^{2^3} \pmod{19} \equiv \\ \equiv 36^{2^2} \pmod{19} \equiv (-2)^{2^2} \pmod{19} \equiv 16 \pmod{19}.$$

$$2^{2^8} + 3 \equiv 16 + 3 \pmod{19} \equiv 0 \pmod{19}.$$

Suposem certa la propietat per a $n = k$

$$2^{2^{6k+2}} + 3 \text{ és múltiple de } 19, \text{ o bé } 2^{2^{6k+2}} \equiv 16 \pmod{19}.$$

Provem la propietat per a $n = k + 1$:

$$2^{2^{6(k+1)+2}} \equiv \left(2^{2^{6k+2} \cdot 2^6}\right) \pmod{19} \equiv \left(2^{2^{6k+2}}\right)^{2^6} \pmod{19} \equiv 16^{2^6} \pmod{19} \equiv 16 \pmod{19}.$$

Per tant, $2^{2^{6(k+1)+2}} + 3$ és múltiple de 19.

5.- Siga la sèrie:

$$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$$

$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$$

$$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$$

.....

Continueu la sèrie, demostreu la fórmula.

Solució:

Suposem que la fórmula general és:

$$n^2 + (n+1)^2 + (n(n+1))^2 = (n(n+1)+1)^2.$$

$$\begin{aligned} (n(n+1)+1)^2 - (n(n+1))^2 &= (n(n+1)+1+n(n+1))(n(n+1)+1-n(n+1))= \\ &= (2n(n+1)) \cdot 1 = 2n^2 + 2n + 1. \end{aligned}$$

$$n^2 + (n+1)^2 = 2n^2 + 2n + 1.$$

Aleshores:

$$(n(n+1)+1)^2 - (n(n+1))^2 = n^2 + (n+1)^2$$

$$\text{Per tant, } n^2 + (n+1)^2 + (n(n+1))^2 = (n(n+1)+1)^2.$$

6.- Demostreu que hi ha infinits múltiples de 11 en la sèrie:
200620062006.....2006.

Solució:

$$\text{Siga } N = 20062006 \dots 2006 = 2006(1 + 10^4 + 10^8 + \dots + 10^{4k})$$

$$2006 \equiv 4 \pmod{11}$$

$$10^{4a} \equiv (-1)^{4a} \pmod{11} \equiv 1 \pmod{11}$$

$$\text{Si } k = 11m - 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} 20062006 \dots 2006 &= 2006(1 + 10^4 + 10^8 + \dots + 10^{4(11m-1)}) \equiv 4 \left(1 + \dots + 1 \right) \pmod{11} \equiv \\ &\equiv 4(11m) \pmod{11} \equiv 0 \pmod{11} . \end{aligned}$$

Aleshores, $2006(1 + 10^4 + 10^8 + \dots + 10^{4(11m-1)})$ és múltiple de 11 $\forall m \in \mathbb{N}$.

7.- Proveu que si $a > 0, b > 0$, $(n-1)a^n + b^n \geq n \cdot a^{n-1}b$.

Solució:

Ho provarem per inducció completa:

Si $n = 1$:

$$0 \cdot a^1 + b^1 \geq 1 \cdot a^0 b$$

$$b \geq b.$$

Suposem la propietat certa per a $n = k$, aleshores:

$$(k-1)a^k + b^k \geq k \cdot a^{k-1}b, \text{ o bé: } (k-1)a^k \geq k \cdot a^{k-1}b - b^k.$$

Demostrem la propietat per a $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} k \cdot a^{k+1} + b^{k+1} &= (k-1) \cdot a^{k+1} + a^{k+1} + b^{k+1} = (k-1)a^k a + a^{k+1} + b^{k+1} \stackrel{\text{HI}}{\geq} (k \cdot a^{k-1}b - b^k) a + a^{k+1} + b^{k+1} \geq \\ &\geq k \cdot a^k b - b^k a + a^{k+1} + b^{k+1} \geq \\ &\geq (k+1) \cdot a^k b - b^k a + a^{k+1} + b^{k+1} - a^k b \geq \\ &\geq (k+1) \cdot a^k b + a^k (a-b) + b^k (b-a) \geq \\ &\geq (k+1) \cdot a^k b + (a^k - b^k) (a-b) \geq \\ &\geq (k+1) \cdot a^k b + (a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2}b + b^{k+1}) (a-b) \geq (k+1)a^k b. \end{aligned}$$

8.- Proveu que $n! > n^2$ quan $n \geq 4$.

Solució:

Ho provarem per inducció:

Si $n = 4$:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24, \quad 4^2 = 16, \quad \text{aleshores, } 4! > 4^2.$$

Suposem certa la propietat per a $n = k$, aleshores, $k! > k^2$.

Demostrem la propietat per a $n = k + 1$:

$$(k + 1)! = (k + 1) \underset{HI}{k!} > (k + 1)k^2.$$

Si provem que $n^2 > n + 1$ quan $n \geq 4$ tindrem provat l'exercici:

Ho farem per inducció:

Si $n = 4$:

$$4^2 > 5$$

Suposem certa la propietat per a $n = k$, aleshores, $k^2 > k + 1$.

Demostrem la propietat per a $n = k + 1$:

$$(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1 \underset{HI}{>} k + 1 + 2k + 2 = k + 2 + 2k > k + 2.$$

Aleshores:

$$(k + 1)! = (k + 1) \underset{HI}{k!} > (k + 1)k^2 > (k + 1)(k + 1) = (k + 1)^2.$$

9.- Proveu que $7^{2^n} + 16n - 1$ és múltiple de 64 per a tot n natural.

Solució:

Ho provarem per inducció:

Si $n = 1$:

$$7^{2 \cdot 1} + 16n - 1 = 64 \equiv 0 \pmod{64}$$

Suposem la propietat certa per a $n = k$, aleshores:

$$7^{2^k} + 16k - 1 \equiv 0 \pmod{64}. \text{ Per tant, } 7^{2^k} \equiv 1 - 16k \pmod{64}.$$

Demostrem la propietat per a $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 7^{2^{(k+1)}} + 16(k+1) - 1 &= 7^{2^k \cdot 2} + 16k + 16 - 1 \stackrel{HI}{\equiv} 49(1 - 16k) + 16k + 16 - 1 \pmod{64} \equiv \\ &\equiv 16k \cdot (-48) + 49 + 16 - 1 \pmod{64} \equiv -64(12k - 1) \pmod{64} \equiv 0 \pmod{64} \end{aligned}$$

Aleshores, $7^{2^{(k+1)}} + 16(k+1) - 1$ és múltiple de 64.

10.- Demostreu que $\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$ per a tot n natural.

Solució:

Ho provarem per inducció:

Si $n=1$:

$$\frac{0}{1!} = 0, \quad 1 - \frac{1}{1!} = 0, \quad \text{aleshores, } \frac{0}{1!} = 1 - \frac{1}{1!}.$$

Suposem la propietat certa per a $n = k$, aleshores:

$$\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{k!}.$$

Demostrem la propietat per a $n = k+1$:

$$\begin{aligned} \frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{k-1}{k!} + \frac{k}{(k+1)!} &= 1 - \frac{1}{k!} + \frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)! - (k+1) + k}{(k+1)!} = \\ &= \frac{(k+1)! - 1}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Aleshores la propietat és certa per a tot n natural.