Problemes Nombres 7

1.- La suma de dos nombres naturals és 371 i el quocient entre el seu mínim comú múltiple i el seu màxim comú divisor és 430. Calculeu-los.
Olímpiada espanyola XXVI. Districte València.

2.- Calculeu un nombre natural N de cinc xifres distintes tal que la suma de les variacions ternàries que poden formar-se amb les seues xifres siga igual a N.

3.- Tenim una pila de taronges de base rectangular, la qual es forma col·locant una taronja en un buit que deixen quatre taronges de la capa inferior, continuant fins arribar a una capa formada per una sola fila. Si la capa inferior té $m \times n$ taronges $(m > n)$.
Quantes taronges té tota la pila. Nota: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4.- Demostreu que per a to n natural $2^{2^{6n+2}} + 3$ és múltiple de 19.

5.- Siga la sèrie:
$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$
$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$
$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$
....

Continueu la sèrie, demostreu la fórmula.

6.- Demostreu que hi ha infinits múltiples de 11 en la sèrie:
200620062006..........2006.

7.- Proveu que si $a > 0, b > 0$, $(n-1)a^n + b^n \geq n \cdot a^{n-1}b$.

8.- Proveu que $n! > n^2$ quan $n \geq 4$.

9.- Proveu que $7^{2n} + 16n - 1$ és múltiple de 64 per a tot n natural.

10.- Demostreu que $\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + ... + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$ per a tot n natural.