

## Problemes nombres 8

1.- Siga  $a_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Demostreu que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+3}$  és congruent  $a_n$  mòdul 7.

b) Determineu els valors de  $n$  que verifiquen que  $a_n$  és divisible per 7. Apliqueu el resultat obtingut per esbrinar si els nombres que en sistema de numeració de base 2 s'escriuen  $1110_{(2)}$ ,  $1010100_{(2)}$ , i  $1001001000_{(2)}$  són divisibles per 7.

Oposicions Extremadura 2006.

Solució:

a)

$$\begin{aligned} a_{n+3} - a_n &= 2^{n+3} + 2^{2n+6} + 2^{3n+9} - (2^n + 2^{2n} + 2^{3n}) = \\ &= 7 \cdot 2^n + 63 \cdot 2^{2n} + 511 \cdot 2^{3n} = 7(2^n + 9 \cdot 2^{2n} + 73 \cdot 2^{3n}) \equiv 0 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Aleshores,  $a_{n+3}$  és congruent  $a_n$  mòdul 7.

b)

Aplicarem el teorema de Fermat: (si  $p$  és primer,  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ):

Siga  $n = 6k$ :

$$a_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n} = (2^k)^6 + (2^{2k})^6 + (2^{3k})^6 \equiv 1 + 1 + 1 \pmod{7} \equiv 3 \pmod{7}.$$

Siga  $n = 6k + 1$ :

$$a_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n} = (2^k)^6 2 + (2^{2k})^6 2^2 + (2^{3k})^6 2^3 \equiv 2 + 4 + 8 \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}.$$

Siga  $n = 6k + 2$ :

$$a_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n} = (2^k)^6 2^2 + (2^{2k})^6 2^4 + (2^{3k})^6 2^6 \equiv 4 + 16 + 1 \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}.$$

Siga  $n = 6k + 3$ :

$$a_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n} = (2^k)^6 2^3 + (2^{2k})^6 2^6 + (2^{3k})^6 2^9 \equiv 8 + 1 + 8 \pmod{7} \equiv 3 \pmod{7}.$$

Siga  $n = 6k + 4$ :

$$a_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n} = (2^k)^6 2^4 + (2^{2k})^6 2^8 + (2^{3k})^6 2^{12} \equiv 16 + 4 + 1 \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}.$$

Siga  $n = 6k + 5$ :

$$a_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n} = (2^k)^6 2^5 + (2^{2k})^6 2^{10} + (2^{3k})^6 2^{15} \equiv 32 + 16 + 8 \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}.$$

Aleshores  $a_n$  és divisible per 7 quan  $n = 6k + 1$ ,  $n = 6k + 2$ ,  $n = 6k + 4$ ,  $n = 6k + 5$ .

$1110_{(2)} = 2^1 + 2^2 + 2^3$  en aquest cas  $n = 1$ , aleshores  $1110_{(2)}$  és múltiple de 7.

$1010100_{(2)} = 2^2 + 2^4 + 2^6$ , en aquest cas  $n = 2$ , aleshores  $1010100_{(2)}$  és múltiple de 7.

$1001001000_{(2)} = 2^3 + 2^6 + 2^9$ , en aquest cas  $n = 3$ , aleshores  $1001001000_{(2)}$  no és múltiple de 7.

2.- Proveu que  $(27^4)^9 - (25^3)^6$  és múltiple de 37.  
Oposicions Castella la Manxa 2006.

Solució:

Aplicarem el teorema de Fermat: (si  $p$  és primer,  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ):

37 és un nombre primer:

$$(27^4)^9 = 27^{36} \equiv 1 \pmod{37}.$$

$$(25^3)^6 = 5^{36} \equiv 1 \pmod{37}.$$

$$(27^4)^9 - (25^3)^6 \equiv 1 - 1 \pmod{37} \equiv 0 \pmod{37}.$$

Aleshores,  $(27^4)^9 - (25^3)^6$  és múltiple de 37.

3.- Donada la següent configuració de nombres naturals

			1			
		2	3	4		
	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16
....	....	....	....	....	....	....

a) Determineu la suma  $S_n$  dels nombres situats en la  $n$ -èsima fila.

b) Calculeu  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{S_{n+1}} - \sqrt[3]{S_n})$ .

Oposicions La Rioja 2006.

Solució:

a)

Els primers elements de les files són 1, 2, 5, 10, 17

Que són els elements següents dels quadrats perfectes començant en 0

El primer element de la fila  $n$  és  $(n-1)^2 + 1$ .

En cada fila hi ha  $2n-1$  nombres naturals consecutius.

Aleshores l'últim nombre de la fila  $n$  és  $(n-1)^2 + 1 + 2n - 2 = n^2$

La suma de tots els nombres de la fila  $n$  (suma d'una progressió aritmètica de primer terme  $(n-1)^2 + 1$ , darrer terme  $n^2$  i amb  $2n-1$  sumands) és:

$$S_n = \frac{(n-1)^2 + 1 + n^2}{2} (2n-1) = (n^2 - n + 1)(2n-1).$$

b)

$$S_n = (n^2 - n + 1)(2n-1) = 2n^3 - 3n^2 + 3n - 1.$$

$$S_{n+1} = 2(n+1)^3 - 3(n+1)^2 + 3(n+1) - 1 = 2n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Aprofitarem la igualtat algebraica  $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{S_{n+1}} - \sqrt[3]{S_n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1} - S_n}{\sqrt[3]{S_{n+1}^2} + \sqrt[3]{S_{n+1}S_n} + \sqrt[3]{S_n^2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 1}{\sqrt[3]{(2n^3 + 3n^2 + 3n + 1)^2} + \sqrt[3]{(2n^3 + 2n^2 + 3n + 1)(2n^3 - 3n^2 + 3n - 1)} + \sqrt[3]{(3n^2 - 3n^2 + 3n - 1)^2}} = \end{aligned}$$

Dividint numerador i denominador per  $n^2$ :

$$= \frac{6}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{2}.$$

4.- Siguen  $k, p, n \in \mathbb{N}$ , amb  $0 \leq k \leq p \leq n$ .

a) Demostreu que  $\binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k} \binom{n}{p}$ .

b) Demostreu que  $\binom{n}{0} \binom{n}{p} + \binom{n}{1} \binom{n-1}{p-1} + \binom{n}{2} \binom{n-2}{p-2} + \dots + \binom{n}{p} \binom{n-p}{0} = 2^p \binom{n}{p}$ .

Oposicions Andalusia 2006.

Solució:

a)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} = \frac{n!}{k!(p-k)!(n-p)!}$$

$$\binom{p}{k} \binom{n}{p} = \frac{p!}{k!(p-k)!} \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{k!(p-k)!(n-p)!}$$

Aleshores,  $\binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k} \binom{n}{p}$ .

b)

Aplicant la propietat a)

$$\binom{n}{0} \binom{n}{p} + \binom{n}{1} \binom{n-1}{p-1} + \binom{n}{2} \binom{n-2}{p-2} + \dots + \binom{n}{p} \binom{n-p}{0} =$$

$$= \binom{p}{0} \binom{n}{p} + \binom{p}{1} \binom{n}{p} + \binom{p}{2} \binom{n}{p} + \dots + \binom{p}{p} \binom{n}{p} =$$

$$= \binom{n}{p} \left( \binom{p}{0} + \binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \dots + \binom{p}{p} \right) =$$

$$= \binom{n}{p} (1+1)^p =$$

$$= 2^p \binom{n}{p}.$$

5.- Proveu:

a)  $n! < n^n$  quan  $n \geq 2$ .

b)  $2^n < n!$  quan  $n \geq 4$ .

c)  $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$  quan  $n \geq 1$ .

Solució:

a) Ho provarem per inducció completa:

Si  $n = 2$ ,  $2! < 2^2$ .

Suposem que si  $n = k$ ,  $k! < k^k$ ,  $k \geq 4$

Provem la propietat per a  $n = k + 1$ .

$$(k+1)! = (k+1)k! < \underset{HI}{k^k}(k+1)$$

$$k^k < (k+1)^k.$$

Aleshores,  $(k+1)! = k^k(k+1) < (k+1)^2(k+1) = (k+1)^{k+1}$ .

b) Ho provarem per inducció completa:

Si  $n = 4$ ,  $2^4 < 4!$ , ja que  $16 < 24$ .

Suposem que si  $n = k$ ,  $2^k < k!$   $k \geq 4$ .

Provem la propietat per a  $n = k + 1$ .

$$2^{k+1} = 2^k \cdot \underset{HI}{2} < k! \cdot 2 < k!(k+1) = (k+1)!.$$

c) Ho provarem per inducció completa:

Si  $n = 1$ ,  $1^3 = 1^2(2 \cdot 1^2 - 1)$ .

Suposem que si  $n = k$ ,  $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2k-1)^3 = k^2(2k^2-1)$ .

Provem la propietat per a  $n = k + 1$ .

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2k-1)^3 + \underset{HI}{(2k+1)^3} = k^2(2k^2-1) + (2k+1)^3 =$$

$$= 2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1$$

$$(k+1)^2(2(k+1)^2-1) = 2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1.$$

Aleshores,  $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2k-1)^3 + (2k+1)^3 = (k+1)^2(2(k+1)^2-1)$ .

6.- Ens donen una funció  $f$  que, per tot nombre natural  $n$ , compleix:

$$\begin{cases} f(1) = 2006 \\ f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) = n^2 \cdot f(n) \end{cases}$$

Trobeu  $f(2006)$  i raoneu la resposta.

Olimpíada Anglaterra.

Solució:

Siga  $n \geq 2$ .

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) = (n+1)(n-1)f(n)$$

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n-2) = n(n-2)f(n-1)$$

Restant ambdues igualtats:

$$f(n-1) = (n+1)(n-1)f(n) - n(n-2)f(n-1)$$

$$(1+n(n-2))f(n-1) = (n+1)(n-1)f(n)$$

$$(n-1)^2 f(n-1) = (n+1)(n-1)f(n)$$

Simplificant:

$$\frac{f(n)}{f(n-1)} = \frac{n-1}{n+1} \text{ per a } n \geq 2.$$

$$\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{f(3)}{f(2)} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{f(4)}{f(3)} = \frac{3}{5}$$

....

....

$$\frac{f(n-1)}{f(n-2)} = \frac{n-2}{n}$$

$$\frac{f(n)}{f(n-1)} = \frac{n-1}{n+1}$$

Multiplicant les  $(n-1)$  expressions:

$$\frac{f(n)}{f(1)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot (n-1)!}{(n+1)!} = \frac{2}{(n+1)n}$$

Aleshores:

$$f(n) = \frac{2}{(n+1)n} f(1)$$

$$f(n) = \frac{2}{(n+1)n} 2006$$

Aleshores:

$$f(2006) = \frac{2}{(2007)2006} 2006 = \frac{2}{2007}.$$

7.- Siga  $S$  un conjunt amb  $n$  elements. Proveu que el nombre de parelles  $(A, B)$  on  $A$  i  $B$  són subconjunts de  $X$ ,  $A$  és subconjunt de  $B$  i  $A \neq B$  és igual a  $3^n - 2^n$ .  
Oposicions Balears 2006.

Solució:

Siga  $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  conjunt de  $n$  elements.

El cardinal dels subconjunt de  $k$  elements d'un conjunt de  $m$  elements és:

$$\binom{m}{k}$$

el cardinal de tots els subconjunts de  $k$  elements d'un conjunt de  $m$  elements i  $k$  menor que  $m$  és:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} - 1 = (1+1)^m - 1 = 2^m - 1$$

Siga  $B$  un conjunt de cardinal  $m$ , en total hi ha  $\binom{n}{m}$ , distints en  $X$

Donat  $B$  hi ha  $2^m - 1$  conjunts distints per a  $A$ .

Aleshores el cardinal dels parells  $(A, B)$  és:

$$\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (2^m - 1) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} 2^m - \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} = (2+1)^n - (1+1)^n = 3^n - 2^n.$$

8.- Determineu les solucions naturals per a  $m, n$  de l'equació:

$$n!+1 = (m!-1)^2.$$

Olimpíada Espanyola 2002. Fase Local València.

Solució:

Notem que  $n > m$  i a més a més  $m \geq 3$

$$n!+1 = (m!)^2 - 2(m!) + 1$$

$$n! = (m!)^2 - 2(m!)$$

$$n! = m!(m!-2)$$

$$n(n-1) \cdot \dots \cdot (m+1) \cdot m! = m!(m!-2) \quad (1)$$

$$n(n-1) \cdot \dots \cdot (m+1) = m!-2$$

$m \geq 3$  per tant  $m!$  és múltiple de 3, aleshores,  $m!-2$  no és múltiple de 3.

Per tant, en el primer terme de l'expressió (1) no poden haver més de 2 factors.

Suposem que en l'expressió (1) hi ha només un factor, aleshores tindriem que:

$$n = m + 1$$

$$m + 1 = m! - 2 \text{ que només té la solució } m = 3.$$

Per tant, la solució de l'equació seria  $m = 3, n = 4$ .

Suposem que en l'expressió (1) hi ha dos factor, aleshores tindriem que:

$$n = m + 2$$

$$(m + 2)(m + 1) = m! - 2$$

$$m^2 + 3m + 2 = m! - 2$$

$$m^2 + 3m - m! = 4$$

$$m(m + 3 - (m - 1)!) = 4$$

Com que  $m \geq 3$  l'única solució seria  $m = 4$

$$4(4 + 3 - (3)!) = 4$$

Aleshores,  $n = 6$

Però:

$$6!+1 \neq (4!-1)^2, \quad 720+1 \neq (24-1)^2.$$

Aleshores, l'única solució és  $m = 3, n = 4$ .

9.- El nombre  $N$  és de la forma  $10 + \text{múltiple de } 19$ . Demostreu que no pot ser ni quadrat i cub perfecte.

Societat Romanesa de Matemàtiques.

Solució:

$$N = 10 + 19k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad N \equiv 10 \pmod{19}.$$

Suposem que  $N$  és un quadrat perfecte:

$$N = m^2$$

$$m = 19r + s, \quad 0 \leq s < 19$$

Estudiem les congruències de  $m^2$  mòdul 19.

$$\text{Si } s = 0, \quad m^2 \equiv 0 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 1, \quad m^2 \equiv 1 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 2, \quad m^2 \equiv 2^2 \pmod{19} \equiv 4 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 3, \quad m^2 \equiv 3^2 \pmod{19} \equiv 9 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 4, \quad m^2 \equiv 4^2 \pmod{19} \equiv 16 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 5, \quad m^2 \equiv 5^2 \pmod{19} \equiv 6 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 6, \quad m^2 \equiv 6^2 \pmod{19} \equiv 17 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 7, \quad m^2 \equiv 7^2 \pmod{19} \equiv 11 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 8, \quad m^2 \equiv 8^2 \pmod{19} \equiv 7 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 9, \quad m^2 \equiv 9^2 \pmod{19} \equiv 5 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 10, \quad m^2 \equiv 10^2 \pmod{19} \equiv (-9)^2 \pmod{19} \equiv 5 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 11, \quad m^2 \equiv 11^2 \pmod{19} \equiv (-8)^2 \pmod{19} \equiv 7 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 12, \quad m^2 \equiv 12^2 \pmod{19} \equiv (-7)^2 \pmod{19} \equiv 11 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 13, \quad m^2 \equiv 13^2 \pmod{19} \equiv (-6)^2 \pmod{19} \equiv 17 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 14, \quad m^2 \equiv 14^2 \pmod{19} \equiv (-5)^2 \pmod{19} \equiv 6 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 15, \quad m^2 \equiv 15^2 \pmod{19} \equiv (-4)^2 \pmod{19} \equiv 16 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 16, \quad m^2 \equiv 16^2 \pmod{19} \equiv (-3)^2 \pmod{19} \equiv 9 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 17, \quad m^2 \equiv 17^2 \pmod{19} \equiv (-2)^2 \pmod{19} \equiv 4 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 18, \quad m^2 \equiv 18^2 \pmod{19} \equiv (-1)^2 \pmod{19} \equiv 1 \pmod{19}$$

Aleshores  $m^2$  no és congruent 10 mòdul 19 aleshores  $N$  no pot ser un quadrat perfecte.

Suposem que  $N$  és un cub perfecte:

$$N = m^3$$

$$m = 19r + s, \quad 0 \leq s < 19$$

Estudiem les congruències de  $m^3$  mòdul 19.

$$\text{Si } s = 0, \quad m^3 \equiv 0 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 1, \quad m^3 \equiv 1 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 2, \quad m^3 \equiv 2^3 \pmod{19} \equiv 8 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 3, \quad m^3 \equiv 3^3 \pmod{19} \equiv 8 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 4, \quad m^3 \equiv 4^3 \pmod{19} \equiv 7 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 5, \quad m^3 \equiv 5^3 \pmod{19} \equiv 11 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 6, m^3 \equiv 6^3 \pmod{19} \equiv 7 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 7, m^3 \equiv 7^3 \pmod{19} \equiv 1 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 8, m^3 \equiv 8^3 \pmod{19} \equiv 18 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 9, m^3 \equiv 9^3 \pmod{19} \equiv 7 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 10, m^3 \equiv 10^3 \pmod{19} \equiv (-9)^3 \pmod{19} \equiv -7 \pmod{19} \equiv 11 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 11, m^3 \equiv 11^3 \pmod{19} \equiv (-8)^3 \pmod{19} \equiv -18 \pmod{19} \equiv 1 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 12, m^3 \equiv 12^3 \pmod{19} \equiv (-7)^3 \pmod{19} \equiv -1 \pmod{19} \equiv 18 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 13, m^3 \equiv 13^3 \pmod{19} \equiv (-6)^3 \pmod{19} \equiv -7 \pmod{19} \equiv 12 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 14, m^3 \equiv 14^3 \pmod{19} \equiv (-5)^3 \pmod{19} \equiv -11 \pmod{19} \equiv 8 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 15, m^3 \equiv 15^3 \pmod{19} \equiv (-4)^3 \pmod{19} \equiv -7 \pmod{19} \equiv 12 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 16, m^3 \equiv 16^3 \pmod{19} \equiv (-3)^3 \pmod{19} \equiv -8 \pmod{19} \equiv 11 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 17, m^3 \equiv 17^3 \pmod{19} \equiv (-2)^3 \pmod{19} \equiv -8 \pmod{19} \equiv 11 \pmod{19}$$

$$\text{Si } s = 18, m^3 \equiv 18^3 \pmod{19} \equiv (-1)^3 \pmod{19} \equiv -1 \pmod{19} \equiv 18 \pmod{19}$$

Aleshores  $m^3$  no és congruent 10 mòdul 19 aleshores  $N$  no pot ser un cub perfecte.

10.- Siguen  $p$  i  $q$  nombres primers tals que  $\frac{p^2 + q^2}{p + q}$  és un nombre enter, aleshores  $p = q$ .

Solució:

$\frac{p^2 + q^2}{p + q}$  és un nombre enter si i només si  $\frac{p^2 + q^2 + 2pq - 2pq}{p + q}$  és un nombre enter, si i només si  $\frac{2pq}{p + q}$  és un nombre enter.

Per tant  $p + q$  divideix a  $2pq$ .

Els divisors de  $2pq$  són  $1, 2, p, q, 2p, 2q, pq, 2pq$ .

Si  $p + q = 1$  és impossible ja que  $p, q \geq 1$ .

Si  $p + q = 2$  implicaria que  $p = q = 1$ .

Si  $p + q = p$  implicaria que  $q = 0$ , que és una contradicció.

Si  $p + q = q$  implicaria que  $p = 0$ , que és una contradicció.

Si  $p + q = 2p$  implicaria que  $p = q$ .

Si  $p + q = 2q$  implicaria que  $p = q$ .

Si  $p + q = pq$  aleshores,  $p = q(p - 1)$  com que  $p$  i  $q$  són primers  $p = q = 2$

Si  $p + q = 2pq$  aleshores,  $p = q(2p - 1)$  com que  $p$  i  $q$  són primers, aleshores  $p = q$ , o bé  $q = 1$ ,  $p = 2p - 1$ . Per tant,  $p = q = 1$ .