Problemes Nombres 8

1.- Siga $a_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$, $n \in N$.

a) Demostreu que $\forall n \in N$, a_{n+3} és congruent a_n mòdul 7.

b) Determineu els valors de n que verifiquen que a_n és divisible per 7. Apliqueu el resultat obtingut per esbrinar si els nombres que en sistema de numeració de base 2 s'escriuen $1110_{(2}$, $1010100_{(2}$, i $1001001000_{(2}$ són divisibles per 7.

Oposicions Extremadura 2006.

2.- Proveu que $\left(27^4\right)^9 - \left(25^3\right)^6$ és múltiple de 37. Oposicions Castella la Manxa 2006.

3.- Donada la següent configuració de nombres naturals

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 2 & 3 & 4 & & \\
 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\
10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

a) Determineu la suma S_n dels nombres situats en la n-èsima fila.

b) Calculeu $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{S_{n+1}} - \sqrt[3]{S_n}\right)$. Oposicions La Rioja 2006.

4.- Siguen $k, p, n \in N$, amb $0 \le k \le p \le n$.

a) Demostreu que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$.

b) Demostreu que $\binom{n}{0}\binom{n}{p} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{p-1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{p-2} + \dots\dots + \binom{n}{p}\binom{n-p}{0} = 2^p\binom{n}{p}$.

Oposicions Andalusia 2006.

5.- Proveu:

a) $n! < n^n$ quan $n \ge 2$.

b) $2^n < n!$ quan $n \ge 4$.

c) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots\dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$ quan $n \ge 1$.

6.- Ens donen una funció f que, per tot nombre natural n, compleix:

$$\begin{cases} f(1) = 2006 \\ f(1) + f(2) + f(3) + \dots. + f(n) = n^2 \cdot f(n) \end{cases}$$

Trobeu f(2006) i raoneu la resposta. Olimpíada Anglaterra.

7.- Siga S un conjunt amb n elements. Proveu que el nombre de parelles (A, B) on A i B són subconjunts de X, A és subconjunt de B i $A \ne B$ és igual a $3^n - 2^n$.

Oposicions Balears 2006.

8.- Determineu les solucions naturals per a m, n de l'equació:

$n! + 1 = (m! - 1)^2$. Olimpíada Espanyola 2002. Fase Local València.

9.- El nombre N és de la forma 10+múltiple de 19. Demostreu que no pot ser ni quadrat i cub perfecte. Societat Romanesa de Matemàtiques.

10.- Siguen p i q nombres primers tals que $\dfrac{p^2 + q^2}{p+q}$ és un nombre enter, aleshores $p = q$.