1.- Determineu tots els nombres enters n tal que $\frac{n+98}{n+19}$ siga enter.

Solució:

$\frac{n+98}{n+19} = 1 + \frac{79}{n+19}$

$n+19$ divideix a 79 i 79 és un nombre primer.

Aleshores les possibilitats de n són:

$n+19 = 79$, aleshores, $n = 60$, en aquest cas, $\frac{60+98}{60+19} = 2$.

$n+19 = 1$, aleshores, $n = -18$, en aquest cas, $\frac{-18+98}{-18+19} = 70$.

$n+19 = -79$, aleshores, $n = -98$, en aquest cas, $\frac{-98+98}{-98+19} = 0$.

$n+19 = -1$, aleshores, $n = -20$, en aquest cas, $\frac{-20+98}{-20+19} = -78$.

2.- Siguen a, b, i c nombres enters tals que $ab-(a+b)=19$ i $bc-(b+c)=97$, determineu tots els valors possibles de $ca-(c-a)$.

Solució:

$ab-(a+b)=19 \qquad (1)$

$bc-(b+c)=97 \qquad (2)$

Restant les dues igualtats (2) i (1):

$b(c-a)-(c-a)=78$

$(b-1)(c-a)=78$

$$c-a=\frac{78}{b-1}$$

Com $c-a$ és enter, $b-1$ divideix a $78=2\cdot 3\cdot 13$.

Aleshores, $b-1=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 13, \pm 26, \pm 39, \pm 78$.

Estudiarem cadascun del 16 casos:

Si $b-1=1$, $b=2$. Substituint en (1), (2) $a=21$, $c=99$ Aleshores, $ca-(c-a)=21\cdot 99-78=2001$.
Si $b-1=-1$, $b=0$. Substituint en (1), (2) $a=-19$, $c=-97$ Aleshores, $ca-(c-a)=(-19)\cdot(-79)-(-78)=1579$.
Si $b-1=2$, $b=3$. Substituint en (1), (2) $a=11$, $c=50$ Aleshores, $ca-(c-a)=(11)\cdot(50)-39=511$.
Si $b-1=-2$, $b=-1$. Substituint en (1), (2) $a=-9$, $c=-48$ Aleshores, $ca-(c-a)=(-9)\cdot(-48)-(-39)=471$.
Si $b-1=3$, $b=4$. Substituint en (1) $3a=23$, que no té solució entera.
Si $b-1=-3$, $b=-2$. Substituint en (1) $-3a=17$, que no té solució entera.
Si $b-1=6$, $b=7$. Substituint en (1) $6a=26$, que no té solució entera.
Si $b-1=-6$, $b=-5$. Substituint en (1) $-6a=14$, que no té solució entera.
Si $b-1=13$, $b=14$. Substituint en (1) $13a=33$, que no té solució entera.
Si $b-1=-13$, $b=-12$. Substituint en (1) $-13a=7$, que no té solució entera.
Si $b-1=26$, $b=27$. Substituint en (1) $26a=46$, que no té solució entera.
Si $b-1=-26$, $b=-25$. Substituint en (1) $26a=-6$, que no té solució entera.
Si $b-1=39$, $b=40$. Substituint en (1) $39a=59$, que no té solució entera.
Si $b-1=-39$, $b=-38$. Substituint en (1) $-39a=-19$, que no té solució entera.
Si $b-1=78$, $b=79$. Substituint en (1) $78a=98$, que no té solució entera.
Si $b-1=-78$, $b=-77$. Substituint en (1) $-78a=-58$, que no té solució entera.

3.- Resoleu les següents qüestions de divisibilitat:

a) En una batalla en què participen entre 10000 i 11000 soldats, resultaren morts $\frac{23}{165}$ del total i ferits $\frac{35}{143}$ del total. Determineu quants soldats resultaren il·lesos.

b) Determineu el nombre $N=2^a\cdot 5^b$ sabent que la suma dels seus divisors és 961
Oposicions Andalusia 2000.

Solució:

a)

Siga x = nombres dels soldats participants en la batalla.

El nombre de morts és: $\frac{23}{165}x$, aleshores, 165 divideix x.

El nombre de ferits és: $\frac{35}{143}x$, aleshores, 143 divideix x.

El $\text{mcm}(165,143)=3\cdot 5\cdot 11\cdot 13=2145$ divideix x.

Per tant, $x=2145k$, a més a més, $10000\le x\le 11000$

L'únic k que ho acompleix és $k=5$, $x=2145\cdot 5=10725$.

El nombre d'il·lesos és:

$$x-\left(\frac{23}{165}+\frac{35}{143}\right)x=6605.$$

b)

Els divisors de N són:

$1, 2, 2^2, 2^3, ...,2^a$

$1\cdot 5, 2\cdot 5, 2^2\cdot 5, 2^3\cdot 5, ...,2^a\cdot 5$

$1\cdot 5^2, 2\cdot 5^2, 2^2\cdot 5^2, 2^3\cdot 5^2, ...,2^a\cdot 5^2$

....

$1\cdot 5^b, 2\cdot 5^b, 2^2\cdot 5^b, 2^3\cdot 5^b, ...,2^a\cdot 5^b$

La suma de tots els divisors és:

$$\left(1+2+2^2+2^3+.....+2^a\right)\left(1+5+5^2+5^3+.....+5^b\right)=961.$$

Aplicant la suma de la progressió geomètrica

$$\left(2^{a+1}-1\right)\left(\frac{5^{b+1}-1}{5-1}\right)=961. \qquad \left(2^{a+1}-1\right)\left(5^{b+1}-1\right)=3844.$$

$5^{b+1}-1<3844$, aleshores, $b+1\le 5$. Per tant, $b\le 4$.

Suposem $b=4$

$\left(2^{a+1}-1\right)\left(5^5-1\right)=3844$, $2^{a+1}-1=\frac{961}{781}\notin N$, aleshores no té solució.

Suposem $b=3$

$\left(2^{a+1}-1\right)\left(5^4-1\right)=3844$, $2^{a+1}-1=\frac{961}{156}\notin N$, aleshores no té solució.

Suposem $b=2$

$\left(2^{a+1}-1\right)\left(5^3-1\right)=3844$, $2^{a+1}-1=31$.

$2^{a+1}=32=2^5$, aleshores, $a=4$

Suposem $b=1$

$\left(2^{a+1}-1\right)\left(5^{2}-1\right)=3844$, $2^{a+1}-1=\frac{961}{6}\notin N$, aleshores no té solució.

Suposem $b=0$

$\left(2^{a+1}-1\right)\left(5-1\right)=3844$, $2^{a+1}-1=961$.

$2^{a+1}=962$.

$2^{a}=481$ Que no té solució en el natural 2^{a} és un nombre parell.

4.- Determineu totes les solucions de l'equació $n\cdot 2^{n-1}+1=m^2$ amb n, n naturals.

Solució:
$n\cdot 2^{n-1}=m^2-1$
$n\cdot 2^{n-1}=(m+1)(m-1)$.
Suposem $n>3$
Aleshores, m és imparell.
Siga $m=2k+1$
$n\cdot 2^{n-1}=(2k+2)2k$
$n\cdot 2^{n-3}=(k+1)k$

Aleshores, 2^{n-3} divideix a k o bé a $k+1$, per tant, $k+1\geq 2^{n-3}$.
També k o bé $k+1$ (el que siga imparell) divideix a n aleshores, $k\leq n$.
Per tant, $n+1\geq 2^{n-3}$.

Provem que $n+1<2^{n-3}$ per a tot natural $n>5$

Provem-ho per a $n=6$:
$6+1<2^3$.
Suposem certa la propietat per a $n=p$, $p+1<2^{p-3}$.
Provem la proposició per a $n=p+1$
$p+2<2(p+1)\underset{HI}{<}2\cdot 2^{p-3}=2^{p-2}$.

Aleshores, $0\leq n\leq 5$.

Suposem $n=0$:
$0\cdot 2^{0-1}+1=m^2$, aleshores, $m=1$.

Suposem $n=1$:
$1\cdot 2^{1-1}+1=m^2$, aleshores, $m^2=2$. No té solució natural.

Suposem $n=2$:
$2\cdot 2^{2-1}+1=m^2$, aleshores, $m^2=5$. No té solució natural.

Suposem $n=3$:
$3\cdot 2^{3-1}+1=m^2$, aleshores, $m^2=13$. No té solució natural.

Suposem $n=4$:
$4\cdot 2^{4-1}+1=m^2$, aleshores, $m^2=33$. No té solució natural.

Suposem $n=5$:
$5\cdot 2^{5-1}+1=m^2$, aleshores, $m=9$.

5.- Proveu que si $10a+b$ és múltiple de 7 aleshores, $a-2b$ és múltiple de 7.
Crux Mathematicorum.

Solució:
si $10a+b$ és múltiple de 7 aleshores, $10a+b=7n$.
$b=7n-10a$.

$a-2b=a-2(7n-10a)=-14n+21a=7(-2n+3a)$.
Aleshores,
$a-2b$ és múltiple de 7.

6.-
a) Proveu que $121_{(b}$ és un quadrat perfecte per a qualsevol base $b > 2$.
b) Determineu el menor valor de b a fi que $232_{(b}$ siga un quadrat perfecte.
Crux Mathematicorum.

Solució:
a)
$121_{(b} = 1 \cdot b^2 + 2 \cdot b + 1 = (b+1)^2$, Aleshores, $121_{(b}$ és un quadrat perfecte per a tot b.
Si $b = 2$ no té sentit $121_{(2}$
Per tant $121_{(b}$ és un quadrat perfecte per a qualsevol base $b > 2$.

b)
$232_{(b} = 2 \cdot b^2 + 3 \cdot b + 2$
Per a ser un quadrat perfecte:
$2 \cdot b^2 + 3 \cdot b + 2 = x^2$
$2 \cdot b^2 + 3 \cdot b + 2 - x^2 = 0$.
Resolent l'equació en b:

$$b = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8(2 - x^2)}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{8x^2 - 7}}{4}$$

$b \in N$, aleshores, $\frac{-3 \pm \sqrt{8x^2 - 7}}{4} \in N$, $8x^2 - 7$ es un quadrat perfecte:

Si $x = 1$, $8x^2 - 7 = 1 = 1^2$, aleshores, $b = -1, \frac{-1}{2} \notin N$.

Si $x = 2$, $8x^2 - 7 = 25 = 5^2$, aleshores, $b = -2, \frac{1}{2} \notin N$.

Si $x = 4$, $8x^2 - 7 = 121 = 11^2$, aleshores, $b = \frac{-7}{2} \notin N, b = 2$.

Si $b = 2$ no té sentit $232_{(2}$.

Si $x = 11$, $8x^2 - 7 = 961 = 31^2$, aleshores, $b = \frac{-17}{2} \notin N, b = 7$.

També s'hauria pogut resoldre substituint
$b = 4,5,6,7,...$ en $2b^2 + 3b + 2$ fins trobar el primer quadrat perfecte. Menys operacions hauríem fet.

7.- Resoleu l'equació:

$$100^{\frac{1}{n}} \cdot 100^{\frac{2}{n}} \cdot 100^{\frac{3}{n}} \cdot .... \cdot 100^{\frac{2006}{n}} = 1000 .$$

Solució:

$$100^{\frac{1}{n}} \cdot 100^{\frac{2}{n}} \cdot 100^{\frac{3}{n}} \cdot .... \cdot 100^{\frac{2006}{n}} = \left(10^2\right)^{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+.....+\frac{2006}{n}} = \left(10^2\right)^{\frac{1+2+.....+2006}{n}} =$$

$$= 10^{2\frac{2007\cdot 2006}{2n}} = 10^{\frac{2007\cdot 2006}{n}} .$$

$$10^{\frac{2007\cdot 2006}{n}} = 10^3 .$$

$$\frac{2007 \cdot 2006}{n} = 3 .$$

Aleshores, $n = \dfrac{2007 \cdot 2006}{3} = 138414$.

8.- Utilitzant només els dígits 2 i a es forma el següent nombre de 90 xifres:
2a22a222a2222a....22...2a
Si el nombre és múltiple de 9. Quins valors són possibles per a a?.

Solució:
Siga N= 2a22a222a2222a....22...2a
Les posicions de les a (comptant des de l'esquerra) formen els següents nombres de xifres:
2a, 22a, 222a, 2222a,....,22...2a. El nombre de xifres és:
2, 3, 4, 5, ,n n el nombre de a (és una progressió aritmètica).
En total hi ha 90 xifres
Calculant la suma:
$\frac{(2+2+(n-1))n}{2}=90$. Simplificant:
$n^2+3n-180=0$. Resolent l'equació, $n=12$.
Aleshores hi ha 12 a i 78 2.

Un nombre és divisible per 9 si la suma de les seues xifres és divisible per 9.
$N\equiv 0(mòd9)$
$N\equiv 12a+2\cdot 78(mòd9)$
Igualant les expressions:
$12a+2\cdot 78(mòd9)=0(mòd9)$.
$3a+3(mòd9)=0(mòd9)$

$3a+3=9k$
$a=3k-1$
Aleshores, $a=2,5,8$.

9.- Si m és un nombre natural que acaba amb 5, proveu que
$12^m + 9^m + 8^m + 6^m$ és múltiple de 1991.

Solució:
$1991 = 11 \cdot 181$
$12^m + 9^m + 8^m + 6^m = 3^m 4^m + 3^m 3^m + 2^m 4^m + 2^m 3^m = (2^m + 3^m)(4^m + 3^m)$.
Siga m acabat en 5, $m = 10n + 5$.

Provem que $2^{10n+5} + 3^{10n+5}$ és múltiple de 11 per a tot n natural.
Ho provarem per inducció:
Si $n = 0$, $2^5 + 3^5 = 275 = 11 \cdot 25$ per tant és múltiple de 11.
Suposem certa la propietat per a $n = k$, $2^{10k+5} + 3^{10k+5} \equiv 0 (\text{mòd} 11)$.
$2^{10k+5} \equiv -3^{10k+5} (\text{mòd} 11)$
Demostrem la propietat per a $n = k + 1$
$2^{10(k+1)+5} + 3^{10(k+1)+5} = 2^{10k+5} 2^{10} + 3^{10k+5} 3^{10} \equiv -3^{10k+5} 2^{10} + 3^{10k+5} 3^{10} (\text{mòd} 11) \equiv$
$\equiv 3^{10k+5} (3^{10} - 2^{10})(\text{mòd} 11) \equiv 3^{10k+5} (-1 - (-1))(\text{mòd} 11) \equiv 0 (\text{mòd} 11)$
en l'última igualtat hem aplicat el petit teorema de Fermat.
Aleshores, $2^{10n+5} + 3^{10n+5}$ és múltiple de 11.

Provem que $4^{10n+5} + 3^{10n+5}$ és múltiple de 181 per a tot n natural.
Ho provarem per inducció:
Si $n = 0$, $4^5 + 3^5 = 1267 = 181 \cdot 7$ per tant és múltiple de 181.
Suposem certa la propietat per a $n = k$, $4^{10k+5} + 3^{10k+5} \equiv 0 (\text{mòd} 181)$.
$3^{10k+5} \equiv -4^{10k+5} (\text{mòd} 181)$
Demostrem la propietat per a $n = k + 1$
$4^{10(k+1)+5} + 3^{10(k+1)+5} = 4^{10k+5} 4^{10} + 3^{10k+5} 3^{10} \equiv 4^{10k+5} 4^{10} - 4^{10k+5} 3^{10} (\text{mòd} 181) \equiv$
$\equiv 4^{10k+5} (4^{10} - 3^{10})(\text{mòd} 181) \equiv 3^{10k+5} (989527)(\text{mòd} 181) \equiv 0 (\text{mòd} 181)$.
Aleshores, $4^{10n+5} + 3^{10n+5}$ és múltiple de 181.

Per tant, $12^m + 9^m + 8^m + 6^m$ és múltiple de 1991.

10.- Siga n un nombre natural. Trobeu els valors de n a fi que $\frac{1+11n}{2n-1}$ siga enter.

Solució:

Si efectuem la divisió natural:

$\frac{1+11n}{2n-1}=5+\frac{n+6}{2n-1}$

$\frac{1+11n}{2n-1}$ és enter si $\frac{n+6}{2n-1}$ és enter

$2n-1$ ha de ser menor o igual que $n+6$

$2n-1\le n+6$.

$n\le 7$.

Si $n=1$, $\frac{1+6}{2-1}=7\in N$

Si $n=2$, $\frac{2+6}{4-1}=\frac{8}{3}\notin Z$

Si $n=3$, $\frac{3+6}{6-1}=\frac{9}{5}\notin Z$

Si $n=4$, $\frac{4+6}{8-1}=\frac{10}{7}\notin Z$

Si $n=5$, $\frac{5+6}{10-1}=\frac{11}{9}\notin Z$

Si $n=6$, $\frac{6+6}{12-1}=\frac{12}{11}\notin Z$

Si $n=7$, $\frac{7+6}{14-1}=1\in N$

Notem que les úniques solucions enteres s'assoleixen quan $n=1,7$.

Si $n=0$, $\frac{1+11\cdot 0}{2\cdot 0-1}=-1\in Z$.