

## Problemes Estadística i Probabilitat 1

1.- Hem de col·locar 9 persones en tres habitacions de forma aleatòria. Calculeu les probabilitats:

- Cada habitació siga ocupada per 3 persones.
- Cada habitació hi haja un nombre de persones superior o igual a dos i inferior o igual a quatre
- Cap habitació quede buida.

Solució

Casos possibles  $VR_3^9 = 3^9$ .

a) Siga A=cada habitació ocupada per 3 persones:

Casos favorables:

$$C_{9,3} \cdot C_{6,3} = 1680.$$

$$P(A) = \frac{1680}{3^9} = \frac{560}{6561}.$$

b) Siga B= Cada habitació hi haja un nombre de persones superior o igual a dos i inferior o igual a quatre.

Casos favorables:

2, 3, 4 o permutacions. 3, 3, 3

$$C_{9,2} \cdot C_{7,3} \cdot P_3 + C_{9,3} \cdot C_{6,3} = 9240.$$

$$P(B) = \frac{9240}{3^9} = \frac{3080}{6561}.$$

c) Siga C=alguna habitació quede buida.

Casos favorables:

018, 027, 036, 045, 009 o permutacions.

$$(C_{9,1} + C_{9,2} + C_{9,3} + C_{9,4}) \cdot P_3 + 3 = 1533.$$

C'=Cap habitació quede buida.

$$P(C') = 1 - P(C) = 1 - \frac{1533}{3^9} = \frac{6050}{6561}.$$

2.- Un punt aleatori A té una distribució uniforme en un quadrat de costat 1. Calculeu les probabilitats dels successos següents:

- La distància del punt A a un costat fix del quadrat no supere r.
- La distància del punt A al costat més proper del quadrat no supere r.
- La distància de A a la diagonal més propera no supere r.
- La distància de A al centre del quadrat no supere r.
- La distància de A a un vèrtex fix del quadrat no supere r.

a)

Siga  $r \leq \overline{PQ} = 1$

Siga PQ el costat fix.

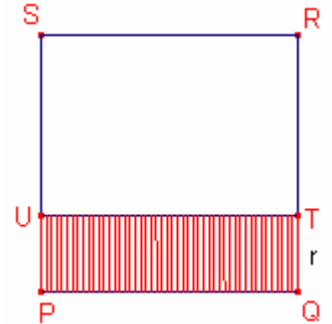
A fi que el punt A diste menor o igual que r del costat PQ El punt A ha d'estar en el rectangle de base PQ i altura menor que r.

Aleshores:

$$P(Z \leq r) = \frac{S_{PQTU}}{S_{PQRS}} = \frac{1 \cdot r}{1^2} = r.$$

Si  $r \geq \overline{PQ} = 1$ .

$$P(Z \leq r) = 1.$$



b)

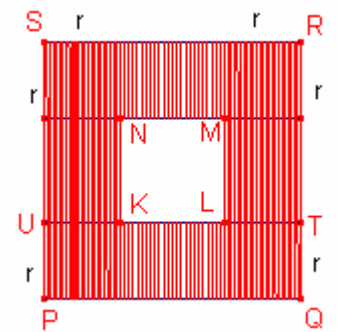
Siga  $r \leq \frac{1}{2}$ .

A fi que el punt A diste menor o igual que r del costat més proper, A no hauria d'estar en el quadrat KLMN l'àrea del qual és  $S_{KLMN} = (1-2r)^2$

$$P(Z \leq r) = 1 - \frac{S_{PQTU}}{S_{PQRS}} = 1 - \frac{(1-2r)^2}{1^2} = 1 - (1-2r)^2 = 4r - 4r^2.$$

Siga  $r \geq \frac{1}{2}$ .

$$P(Z \leq r) = 1.$$



c)

Siga  $r \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

Siguen les rectes paral·leles a les diagonals que disten r unitats.

A fi que el punt A diste menor o igual que r de la diagonal més propera, A no ha de pertanyer a cap dels triangle de pintats.

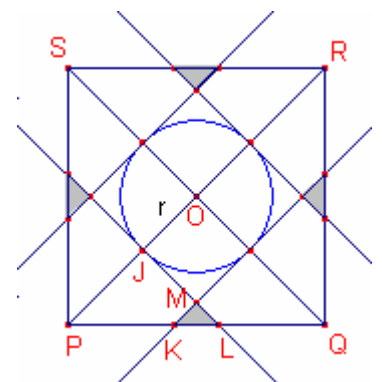
Calculem l'àrea d'un triangle:

$$\overline{OP} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \overline{PJ} = \frac{\sqrt{2}}{2} - r, \quad \overline{ML} = \overline{PJ} - r = \frac{\sqrt{2}}{2} - 2r, \quad S_{KLM} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2r\right)^2}{2}.$$

$$P(Z \leq r) = 1 - \frac{4 \cdot S_{KLM}}{S_{PQRS}} = 1 - \frac{2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2r\right)^2}{1^2} = 4\sqrt{2}r - 8r^2.$$

Siga  $r \geq \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

$$P(Z \leq r) = 1.$$



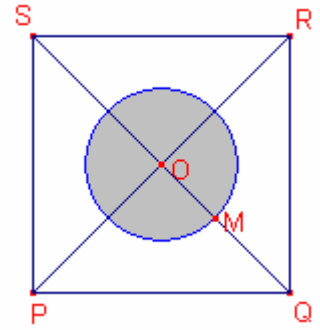
d)

Si  $r \leq \frac{1}{2}$ .

A fi que el punt A diste menor o igual que r del centre, A ha de pertanyer al cercle de centre O i radi r.

L'àrea del cercle de centre O i radi r és:  $S_{\text{cercle}} = \pi \cdot r^2$ .

$$P(Z \leq r) = \frac{S_{\text{cercle}}}{S_{\text{PQRS}}} = \frac{\pi \cdot r^2}{1^2} = \pi \cdot r^2.$$



Si  $\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Calculem l'àrea del triangle  $\triangle OKL$  i del sector circular LOM:

$$\overline{OL} = r, \quad \overline{OK} = \frac{1}{2}, \quad \overline{KL} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}}.$$

$$S_{\triangle OKL} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}}}{2} = \frac{\sqrt{4r^2 - 1}}{8}$$

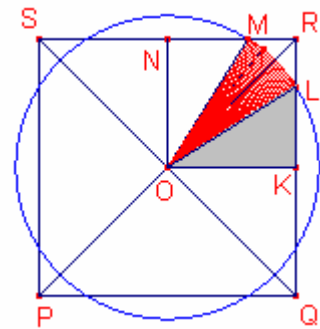
Siga  $\alpha = \angle LOM$ .

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \arccos \frac{\frac{1}{2}}{r} = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \arccos \frac{1}{2r}.$$

L'àrea del sector circular LOM és:

$$S_{\text{sector}} = r^2 \frac{\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \arccos \frac{1}{2r}}{2} = r^2 \left( \frac{\pi}{4} - \arccos \frac{1}{2r} \right)$$

$$P(Z \leq r) = \frac{4(2 \cdot S_{\triangle OKL} + S_{\text{sector}})}{S_{\text{PQRS}}} = \frac{4 \left( \frac{\sqrt{4r^2 - 1}}{4} + \left( \frac{\pi}{4} - \arccos \frac{1}{2r} \right) r^2 \right)}{1^2} = \sqrt{4r^2 - 1} + \left( \pi - 4 \cdot \arccos \frac{1}{2r} \right) r^2$$



Si  $r \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ :

$P(Z \leq r) = 1$ .

e)

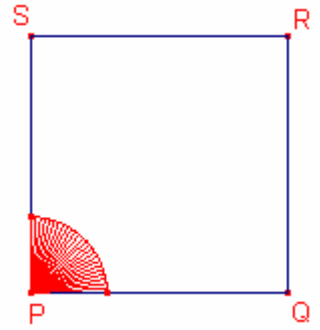
Siga el vèrtex fix P.

Si  $r \leq 1$ .

A fi que el punt A diste menor o igual que r de les diagonals, A ha de pertanyer al quadrant de cercle de centre O i radi r.

L'àrea del quadrant de cercle és:  $S_{\text{Quadrant}} = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$ .

$$P(Z \leq r) = \frac{S_{\text{quadrat}}}{S_{\text{PQRS}}} = \frac{\frac{\pi \cdot r^2}{4}}{1^2} = \frac{\pi \cdot r^2}{4}.$$



Si  $1 \leq r \leq \sqrt{2}$ .

Calculem l'àrea del triangle PQM i del sector MON.

$\overline{PM} = r$ ,  $\overline{PQ} = 1$ , aleshores,  $\overline{QM} = \sqrt{r^2 - 1}$

$$S_{\text{PQM}} = \frac{1 \cdot \sqrt{r^2 - 1}}{2} = \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{2}.$$

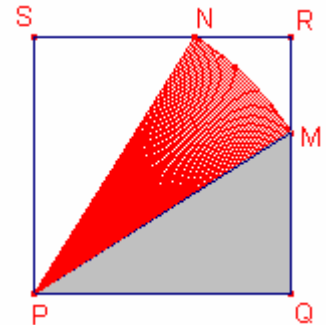
L'àrea del sector MON és:

Siga  $\alpha = \text{MPN}$ .

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \arccos \frac{1}{r}.$$

$$S_{\text{sector}} = r^2 \frac{\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \arccos \frac{1}{r}}{2} = r^2 \left( \frac{\pi}{4} - \arccos \frac{1}{r} \right)$$

$$P(Z \leq r) = \frac{2 \cdot S_{\text{PQM}} + S_{\text{sector}}}{S_{\text{PQRS}}} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{2} + \left( \frac{\pi}{4} - \arccos \frac{1}{r} \right) \cdot 2}{1^2} = \sqrt{r^2 - 1} + \frac{\pi}{4} - \arccos \frac{1}{r}.$$



Si  $r \geq \sqrt{2}$

$P(Z \leq r) = 1$ .

## 3.- Paradoxa de Bertrand

En un cercle de radi  $R$  es traça a l'atzar una corda.

a) Determineu la probabilitat que la longitud de la corda siga major o igual que  $d$  si el punt mig de la corda està distribuït uniformement sobre el cercle.

a1) Calculeu la probabilitat que la corda siga més gran que el costat de l'hexàgon inscrit en el cercle.

a2) Calculeu la probabilitat que la longitud de la corda siga més gran que el costat del triangle equilàter inscrit en el cercle

b) Determineu la probabilitat que la longitud de la corda siga major o igual que  $d$  si un punt és fix i l'altre queda distribuït uniformement sobre la circumferència.

b1) Calculeu la probabilitat que la corda siga més gran que el costat de l'hexàgon inscrit en el cercle.

b2) Calculeu la probabilitat que la longitud de la corda siga més gran que el costat del triangle equilàter inscrit en el cercle

Solució:

a)

Siga la circumferència de centre  $O$  i radi  $R$

Totes les cordes que tenen la mateixa longitud tenen el punt mig sobre una circumferència de centre  $O$ . Calculem el radi d'aquesta circumferència en funció de la longitud  $d$  de la corda.

$$r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}.$$

Per a que la corda siga major que  $d$  el punt mig de la corda ha

$$d'èstar en el cercle de centre  $O$  i radi  $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$$

$$P(Z > d) = \frac{S_{\text{cercle}}}{S_{\text{CERCLE}}} = \frac{\pi \left( R^2 - \frac{d^2}{4} \right)}{\pi R^2} = 1 - \left( \frac{d}{2R} \right)^2.$$

a1)

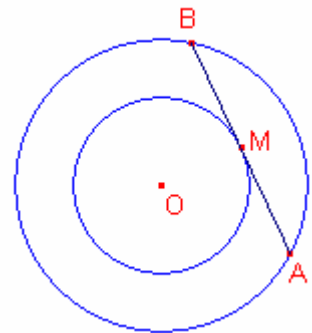
El costat de l'hexàgon inscrit en una circumferència és igual al radi.

$$P(Z > R) = 1 - \left( \frac{R}{2R} \right)^2 = \frac{3}{4}.$$

a2)

El costat del triangle equilàter inscrit en una circumferència és igual  $\sqrt{3}R$ , on  $R$  és el radi.

$$P(Z > \sqrt{3} \cdot R) = 1 - \left( \frac{\sqrt{3} \cdot R}{2R} \right)^2 = \frac{1}{4}$$



b)

Siga A un punt fix.

Totes les cordes que tenen la mateixa longitud tenen el punt

mig sobre una circumferència de centre O. El triangle  $\triangle OMA$  :Siga B tal que  $d = \overline{AB}$ , siga M el punt mig de la corda  $\overline{AB}$ .L'angle  $\alpha = \angle OAM$ .

$$\alpha = \arccos \frac{\overline{AM}}{\overline{AO}} = \arccos \frac{d}{2R}.$$

Per a que la corda siga major que d l'extrem B' ha d'estar en

l'arc BDC on B i C són els únics punts tal que  $d = \overline{AB} = \overline{AD}$ .

Calculem la longitud de l'arc BDC

La longitud de l'arc BD és el doble de la l'angle que l'abraça multiplicat pel radi R

$$\text{Aleshores, } L_{\text{BDC}} = 4 \cdot \arccos \frac{d}{2R} \cdot R.$$

La longitud de la circumferència és:

$$L_{\text{CIRCUMFERÈNCIA}} = 2\pi R.$$

$$P(Z > d) = \frac{L_{\text{BDC}}}{L_{\text{CIRCUMFERÈNCIA}}} = \frac{4 \cdot \arccos \frac{d}{2R} \cdot R}{2\pi R} = \frac{2}{\pi} \arccos \frac{d}{2R}.$$

b1)

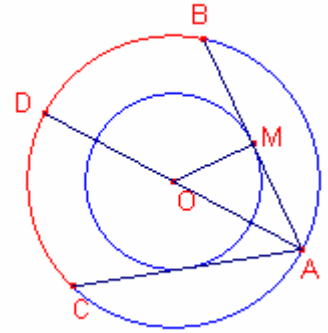
El costat de l'hexàgon inscrit en una circumferència és igual al radi.

$$P(Z > R) = \frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

b2)

El costat del triangle equilàter inscrit en una circumferència és igual  $\sqrt{3}R$ , on R és el radi.

$$P(Z > \sqrt{3}R) = \frac{2}{\pi} \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}.$$



4.- L'aparell de Galton-Pearson és una sèrie de claus disposats en un tauler inclinat en la forma que indica la figura adjunta. Al deixar caure boles des del clau superior, la probabilitat de desviar-se a l'esquerra en cada xoc és  $\frac{1}{2}$ .

- a) Calculeu la probabilitat que la bola caiga en B.
- b) Calculeu la probabilitat que la bola caiguda en B haja colpejat el clau A.

Solució:

Si hi ha n fileres de claus la probabilitat que caiga en la caixa  $r = 0,1,2,\dots,n$  és:

$$P(x_r) = \binom{n}{r} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

a)

Notem que hi ha 10 fileres de claus. La caixa B ocupa el lloc 7 (notem que comença en  $r=0$ ).

Siga  $S = \{\text{caure la bola en la caixa B}\}$

Aleshores,

$$P(S) = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

b)

Siga  $T = \{\text{Pegar la bola en el clau A}\}$

El clau A està sota la fila 7 i ocuparia la caixa 4

$$P(T) = \binom{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7.$$

La probabilitat cercada és  $P(T | S)$ .

$$P(T | S) = \frac{P(T \cap S)}{P(S)} = \frac{P(T) \cdot P(S | T)}{P(S)}$$

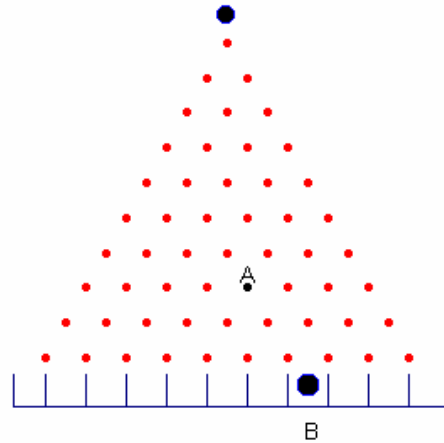
Calculem  $P(S | T)$ .

Notem que si la bola ha pegat en A per a arribar a B recorre 3 fileres i la caixa ocupa el lloc 3:

$$P(S | T) = \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Aleshores:

$$P(T | S) = \frac{P(T \cap S)}{P(S)} = \frac{\binom{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \binom{3}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3}{\binom{10}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}} = \frac{1}{6}.$$



5.- Siga un punt aleatori de l'interior d'un quadrat. Calculeu la probabilitat que el punt estiga més prop algun vèrtex que del centre del quadrat.

Solució:

Siga el quadrat ABCD de centre O.

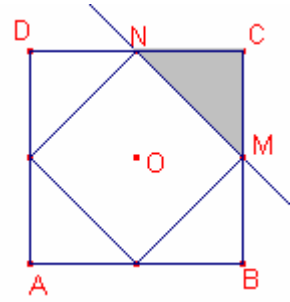
Els punts que equidisten del centre i del vèrtex estan en la mediatriu del centre i del vèrtex.

Siga MN la mediatriu de  $\overline{OC}$  els punts més prop del vèrtex C

pertanyen al triangle  $\triangle MCN$

Aleshores, la probabilitat és:

$$p = \frac{4 \cdot S_{MCN}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}.$$



6.- L'agulla de Buffon.

Un plànol està ratllat amb rectes paral·leles separades entre si una distància  $2a$ .

- a) Sobre el plànol es llança a l'atzar una agulla de longitud  $2b$  ( $b < a$ ). Calculeu la probabilitat que l'agulla talle una recta qualsevol.
- b) Si llancem  $n$  agulles, totes elles de longituds menors que  $2b$ , calculeu la probabilitat que almenys una d'elles tallés una recta qualsevol.

Solució:

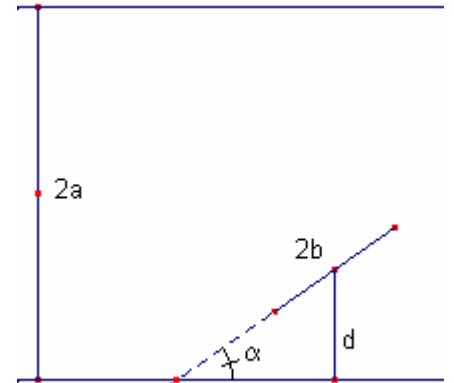
a)

Siga  $d$  la distància del centre de l'agulla a la línia més propera.

Siga  $\alpha$  l'angle que forma l'agulla amb la línia més propera.

Notem que  $d \in [0, a]$ ,  $\alpha \in [0, \pi[$

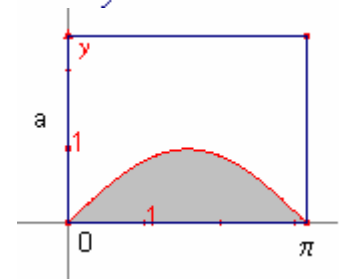
A fi que l'agulla talle la línia més propera ha de passar que  $\alpha \in [0, \pi[$  i que  $0 \leq d \leq b \cdot \sin \alpha$ .



Representem en el plànol real la funció  $d = b \cdot \sin \alpha$ .

La probabilitat que cerquem és el quocient de l'àrea de la corba entre  $[0, \pi]$  i l'àrea del rectangle de costats  $\pi$ ,  $a$ :

$$p = \frac{\int_0^\pi b \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha}{a \cdot \pi} = \frac{2b}{a \cdot \pi}$$



b)

Siguen  $2b_1, 2b_2, \dots, 2b_n$  les longituds de les agulles.

La probabilitat de que la agulla  $i$  no talli cap línia és:

$$p_i = 1 - \frac{2b_i}{a \cdot \pi}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

La probabilitat que cap agulla talli cap línia és:

$$\left(1 - \frac{2b_1}{a \cdot \pi}\right) \left(1 - \frac{2b_2}{a \cdot \pi}\right) \dots \left(1 - \frac{2b_n}{a \cdot \pi}\right).$$

La probabilitat que alguna agulla tallés alguna línia és el contrari de l'anterior:

$$p = 1 - \left(1 - \frac{2b_1}{a \cdot \pi}\right) \left(1 - \frac{2b_2}{a \cdot \pi}\right) \dots \left(1 - \frac{2b_n}{a \cdot \pi}\right).$$

7.- Es llança una moneda dues vegades si en la primera tirada ix cara es tiren a boles blanques en una urna i si ix creu 2a boles blanques, si en la segona tirada ix cara es llancen b boles negres en la urna i si ix creu 2b boles negres. De la urna es trau una bola a l'atzar. Quina és la probabilitat que isca negra.

Solució:

Siguen  $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$  eixir cara-cara, cara-creu, creu-cara, creu-creu en els llançaments.

Siga B el succés traure bola negra de la urna.

Els successos  $A_{ij}$  són incompatibles dos a dos i la unió és l'univers de possibles.

$$P(B | A_{ij}) = \frac{j \cdot b}{i \cdot a + j \cdot b}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2.$$

$$P(A_{ij}) = \frac{1}{4}.$$

Pel teorema de la probabilitat total:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B | A_{11}) \cdot P(A_{11}) + P(B | A_{21}) \cdot P(A_{21}) + P(B | A_{12}) \cdot P(A_{12}) + P(B | A_{22}) \cdot P(A_{22}) = \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{b}{a+b} + \frac{b}{2a+b} + \frac{2b}{a+2b} + \frac{2b}{2a+2b} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{2b}{a+b} + \frac{b}{2a+b} + \frac{2b}{a+2b} \right). \end{aligned}$$

8.- Siguen  $\alpha$  i  $\beta$  dos nombres reals positius, amb  $\alpha < \beta$ . Si seleccionem a l'atzar dos punts d'un segment de longitud  $\beta$ , calculeu la probabilitat que estiguen almenys a distància  $\alpha$ .

Oposicions Balears 2005.

Solució:

Donar dos punts P, Q del segment de longitud  $\beta$  equival a donar un punt  $M(x,y)$  en el quadrat de costat  $\beta$  en què x, y tenen distribucions uniformes en  $]0, \beta[$  independents.

Volem calcular  $\overline{PQ} \geq \alpha$

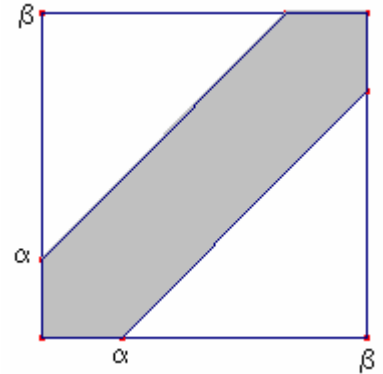
La funció de distribució és del conjunt favorables a  $\overline{PQ} \leq \alpha$  és el conjunt limitat per les rectes  $|x - y| = \alpha$ , paral·lels a la diagonal principal.

Aleshores, la funció de distribució és:

$$F(\alpha) = P(X \leq \alpha) = \frac{\beta^2 - (\beta - \alpha)^2}{\beta^2} = \frac{(2\beta - \alpha)\alpha}{\beta^2}$$

Volem calcular

$$P(X \geq \alpha) = 1 - P(X < \alpha) = 1 - \frac{(2\beta - \alpha)\alpha}{\beta^2}.$$



La probabilitat que cerquem és el contrari de la superfície ratllada

9.- Si seleccionem a l'atzar dos punts d'un segment, calculeu la probabilitat que amb els tres trossos es pugui construir un triangle.

Solució:

Podem suposar sense llevar generalitat que el segment és de longitud 1.

Donar dos punts P, Q del segment de longitud 1 equival a donar un punt  $M(x,y)$  en el quadrat de costat 1 en què  $x, y$  tenen distribucions uniformes en  $]0,1[$  independents.

Suposem  $x < y$

A fi que es pugui construir un triangle s'ha d'acomplir la desigualtat triangular:

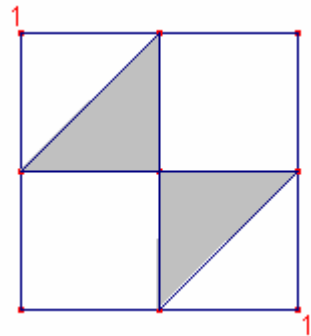
$$\begin{cases} x + (y - x) > 1 - y \\ x + (1 - y) > y - x \\ (y - x) + (1 - y) > x \end{cases} \text{ que és equivalent a: } \begin{cases} y > \frac{1}{2} \\ x - y > \frac{-1}{2} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Anàlogament si  $x > y$  s'ha d'acomplir:

$$\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ y - x > \frac{-1}{2} \\ y < \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'àrea de les dues regions té àrea  $\frac{1}{4}$ .

Aleshores, la probabilitat és  $p = \frac{1}{4}$ .



10.- Una urna conté 10 boles blanques i 8 negres. Efectuem una extracció de dues boles. Sabem que hem vist una bola negra. Quina és la probabilitat que l'altra siga també negra.

Solució:

Siga A = "Que al extraure dues boles, una almenys siga negra".

Siga B = "Que al extraure dues boles les dues siguen negres".

Notem que  $A \cap B = B$ .

$$P(A \cap B) = P(B) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{18}{2}} = \frac{28}{153}.$$

$$P(A) = 1 - P(2 \text{ boles blanques}) = 1 - \frac{\binom{10}{2}}{\binom{18}{2}} = \frac{12}{17}.$$

La probabilitat cercada és  $P(B | A)$ .

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{28}{153}}{\frac{12}{17}} = \frac{7}{27}.$$