11.- Siguen $n+1$ bosses iguals amb n boles cadascuna.
En la primera bossa hi ha n boles negres; en la segona totes són negres menys una que és blanca; en la tercera totes són negres menys dues blanques i així successivament fins la darrera bossa on totes les n boles són blanques.
S'agafa una bossa a l'atzar i d'ella s'extrauen tres boles a la vegada.
Determineu la probabilitat que totes les tres boles siguen blanques.
Oposicions Madrid 1974

Solució:
Siga $B_i = \text{Escollir bossa } i$.
En la bossa i hi ha $n-i+1$ boles negres, $i-1$ boles blanques.
Siga $T = \text{traure 3 boles blanques sense reposició}$.

Aplicant el teorema de la probabilitat total: $P(T) = \sum_{i=1}^{n+1} P(B_i)\cdot P(T \mid B_i)$

$$P(B_i) = \frac{1}{n+1}, \qquad P(T \mid B_i) = \frac{\binom{i-1}{3}}{\binom{n}{3}} = \frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{n(n-1)(n-2)}.$$

$$P(T) = \sum_{i=1}^{n+1} P(B_i)\cdot P(T \mid B_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+1}\,\frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{(n+1)n(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n+1} (i-1)(i-2)(i-3)$$

Siga $S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} (i-1)(i-2)(i-3)$

$S_{n+2} - S_{n+1} = (n+1)n(n-1) = n^3 - n$

$S_{n+3} - S_{n+2} = (n+2)(n+1)n = n^3 + 3n^2 + 2n$.

Restant:

$S_{n+3} - 2S_{n+2} + S_{n+1} = 3n^2 + 3n$

$S_{n+4} - 2S_{n+3} + S_{n+2} = 3n^2 + 9n + 6$

Restant:

$S_{n+4} - 3S_{n+3} + 3S_{n+2} - S_{n+1} = 6n + 6$

$S_{n+5} - 3S_{n+4} + 3S_{n+3} - S_{n+2} = 6n + 12$

Restant:

$S_{n+5} - 4S_{n+4} + 6S_{n+3} - 4S_{n+2} + S_{n+1} = 6$

$S_{n+6} - 4S_{n+5} + 6S_{n+4} - 4S_{n+3} + S_{n+2} = 6$

Restant:

$S_{n+6} - 5S_{n+5} + 10S_{n+4} - 10S_{n+3} + 5S_{n+2} - S_{n-1} = 0$

L'equació característica és: $(x-1)^5 = 0$

Aleshores, $S_{n+1} = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4$.

Substituint en S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 i resolent el sistema:

$$A = 0, B = \frac{1}{2}, C = \frac{-1}{4}, D = \frac{-1}{2}, E = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} (i-1)(i-2)(i-3) = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 - \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2).$$

$$P(T) = \frac{1}{(n+1)n(n-1)(n-2)}\,\frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2) = \frac{1}{4}.$$

12.- Es consideren els nombres naturals del 1 al 10^n.
S'escull un nombre a l'atzar. Calculeu la probabilitat que el nombre siga múltiple de 2 ó 3 en funció de n.

Solució:

Siga A = nombre de parells del 1 al 10^n.

Siba B = nombre de múltiples de 3 del 1 al 10^n.

La probabilitat cercada és $P(A \cup B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

El nombre de parells del 1 al 10^n és $\frac{1}{2}10^n$

Aleshores, $P(A) = \frac{1}{2}$.

El nombre de múltiples de 3 del 1 al 10^n és la part entera de $\frac{10^n}{3}$.

$10^n \equiv 1(\text{mòd}\,3)$

aleshores, el darrer múltiple de 3 del 1 al 10^n és $10^n - 1$

El nombre de múltiples de 3 del 1 al 10^n és $\frac{10^n - 1}{3}$.

Aleshores, $P(B) = \frac{\frac{10^n - 1}{3}}{10^n}$.

$A \cap B = \text{nombe de múlitple de 6 del 1 al } 10^n$

El nombre de múltiples de 6 del 1 al 10^n és la part entera de $\frac{10^n}{6}$.

$10^n \equiv 4(\text{mòd}\,6)$

aleshores, el darrer múltiple de 6 del 1 al 10^n és $10^n - 4$

El nombre de múltiples de 6 del 1 al 10^n és $\frac{10^n - 4}{6}$.

Aleshores, $P(A \cap B) = \frac{\frac{10^n - 4}{6}}{10^n}$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{10^n - 1}{3 \cdot 10^n} - \frac{10^n - 4}{6 \cdot 10^n} = \frac{1 + 2 \cdot 10^n}{3 \cdot 10^n}.$$

13.- Sis parelles de distint sexe es troben en una habitació.

a) Si s'escullen dos persones a l'atzar, determineu la probabilitat que:

a1) Siguen parella.

a2) Un siga home l'altre dona.

b) Si s'escullen a l'atzar quatre persones, determineu la probabilitat que:

b1) Siguen dos parelles

b2) Cap d'ells siga parella.

b3) Hi haja exactament una parella.

c) Si les dotze persones es divideixen en sis grups de dues persones, determineu la probabilitat que:

c1) Cada grup siga una parella.

c2) Cada grup tinga un home i una dona.

Solució:

a)

Els casos possibles són $\binom{12}{2} = 66$.

Siga $A_1 = \text{Les dues persones escollides siguen parella}$.

Els casos favorables són 6.

$$P(A_1) = \frac{6}{\binom{12}{2}} = \frac{1}{11}.$$

Siga $A_2 = \text{Les dues persones siguen un home i una dona}$.

Per cada home es poden formar 6 parelles distintes (home-dona)

Els casos favorables són $6 \cdot 6 = 36$.

$$P(A_2) = \frac{36}{\binom{12}{2}} = \frac{6}{11}.$$

b)

Els casos possibles són $\binom{12}{4} = 495$.

Siga $B_1 = \text{Les 4 persones escollides siguen 2 parelles}$.

Com que hi ha 6 parelles, els casos favorables són: $\binom{6}{2} = 15$.

$$P(B_1) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{12}{4}} = \frac{1}{33}.$$

Siga $B_2 = \text{De les 4 persones no hi haja cap parella}$.

Els casos favorable són el nombre de subconjunts de 4 persones que podem formar , escollits cadascun d'una parella distinta.

El nombre de grups de parelles són $\binom{6}{4}$ i per cada grup escollir dues persones.

Aleshores, els casos favorables $\binom{6}{4} 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$$P(B_2) = \frac{\binom{6}{4}2^4}{\binom{12}{4}} = \frac{15}{33}.$$

Siga $B_3 = \text{De les 4 persones exactament hi ha 1 parella}$.

Fixat una parella, les altres dues persones han d'estar formats per parelles distintes que serien $\binom{5}{2}2 \cdot 2$

Aleshores els casos favorables són $\binom{5}{2}2 \cdot 2 \cdot 6$.

$$P(B_3) = \frac{\binom{5}{2}2^2 \cdot 6}{\binom{12}{4}} = \frac{15}{33}.$$

c)

Calculem els casos possibles.

Es tracta de dividir les 12 persones en 6 grups de 2 persones.

Una persona pot fer grup amb 11 de les restants, una de les 10 restants por fer grup amb 9 persones, una de les 8 restants pot fer grups amb 7, i així successivament.

Aleshores els casos possibles són:

$11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 10395$.

Siga $C_1 = \text{Cadascun dels grups siguen parella}$.

Els casos favorables és 1.

$$P(C_1) = \frac{1}{10395}.$$

Siga $C_2 = \text{Cadascun dels grups està format per un home i una dona}$.

Ordenats els homes, el primer pot formar grup amb 6 dones, els següent home amb 5, i així successivament.

Aleshores, els casos favorables són $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$.

$$P(C_2) = \frac{6!}{10395} = \frac{144}{2079}.$$

14.- En una loteria es vénen n^2 bitllets i hi ha n premis. Si comprem n bitllets quina és la probabilitat que obtinguem algun premi?.

Solució:
Siga A = no obtenir cap premi al comprar n bitllets.

Casos possibles, $\binom{n^2}{n}$.

Casos favorables $\binom{n^2-n}{n}$.

La probabilitat buscada és la del succés contrari de A:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{\binom{n^2-n}{n}}{\binom{n^2}{n}}$$

Si n és gran aleshores $P(A) \approx \frac{1}{e}$.

15.- En una urna hi ha un total de 12 boles entre blanques i negres.
Sabent que la probabilitat d'escollir dues boles blanques en dues extraccions sense reemplaçament és $\frac{1}{11}$, calculeu quantes boles negres hi ha a la urna.

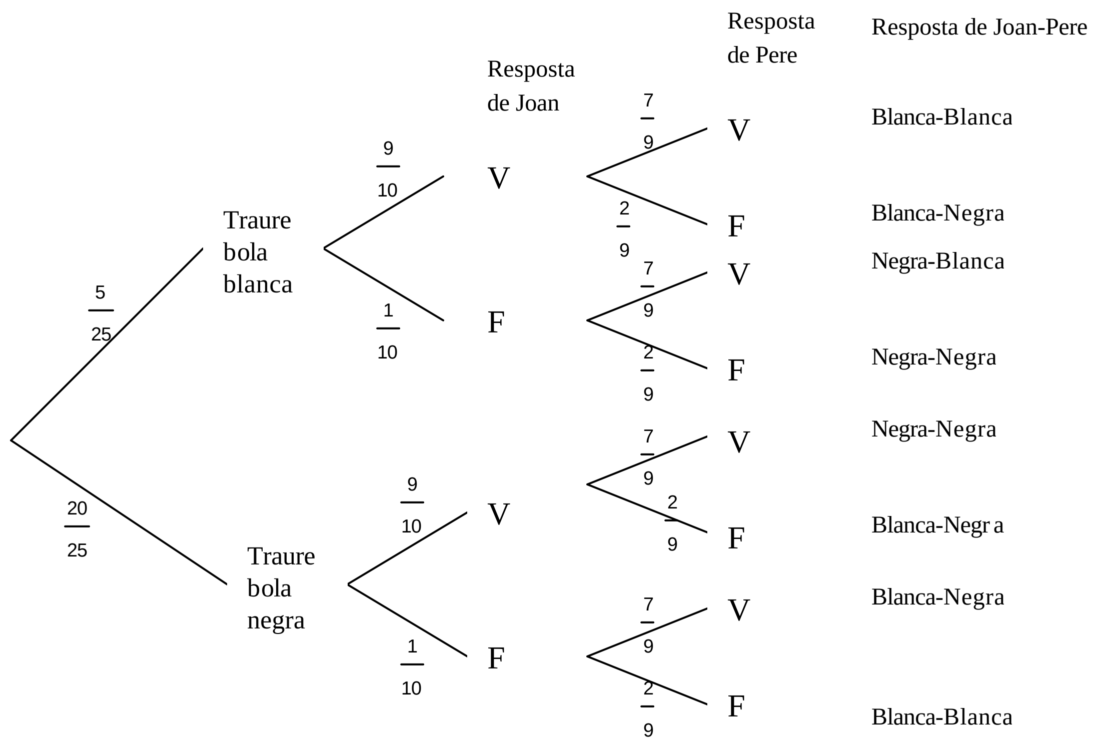
Solució:
Siga $x = \text{nombre de boles blanques que hi ha a la urna}$.
Siga $y = \text{nombre de boles negres que hi ha a la urna}$.
$x + y = 12$
Siga el succés $A = \text{traure dues boles blanques sense reemplaçament}$.

$$P(A) = \frac{1}{11}$$

$$P(A) = \frac{\binom{x}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{x(x-1)}{12 \cdot 11}.$$

$\frac{x(x-1)}{12 \cdot 11} = \frac{1}{11}$. Resolent l'equació: $x = 4$ nombre de boles blanques.
El nombre de boles negres és $y = 12 - 4 = 8$.

16.- Joan diu la veritat nou vegades de deu i Pere set de cada nou.
S’extrau una bola a l’atzar d’una bossa que contenia 5 boles blanques i vint negres. Ambdós digueren que la bola extreta era blanca. Quina és la probabilitat que la bola extreta de la urna fóra realment blanca?.



Siga A = Joan i Pere responguen Blanca-Blanca:
Siga S = Bola extreta siga blanca.

$$P(A) = \frac{5}{25}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{7}{9} + \frac{20}{25}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{9} = \frac{71}{450}.$$

$$P(S \mid A) = \frac{P(S\cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{25}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{7}{9}}{\frac{71}{450}} = \frac{\frac{7}{50}}{\frac{71}{450}} = \frac{63}{71}.$$

17.- S'agafa un nombre comprés entre 0 i 999. Quina és la probabilitat que la xifra central siga major que les altres dues.

Solució:
Siga A = que la xifra central del nombre siga major que les altres dues.

Casos possibles 1000

Nombre Central	Casos favorables
1	1
2	2^2
3	3^2
4	4^2
5	5^2
6	6^2
7	7^2
8	8^2
9	9^2
Total:	$1^2+2^2+3^2+.....+9^2=\frac{9\cdot 10\cdot 19}{6}=285$

$P(A)=\frac{285}{1000}$.

Recordem que $1^2+2^2+3^2+........+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

18.- Es tenen dues caixes amb les següents lletres:

ARA	ARA ARA

S’ha d’escollir una de les dues caixes i a continuació extraure, a l’atzar, tres lletres, una a una sense reemplaçament. Si el resultat és ARA aleshores guanya el premi. Quina caixa escolliries?.

Solució:
Siga A = treure en aquest ordre les lletres ARA.
Si escollim la primera caixa.

$$P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

Si escollim la segona caixa.

$$P(A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{5}.$$

Aleshores, escolliríem la primera caixa.

19.- En una reunió hi ha 7 persones quina és la probabilitat que almenys dues hagen nascut el mateix dia de la setmana.

Solució:
Siga el succés A = totes les persones han nascut en dies distints de la setmana.

Casos possibles són 7^7.
Casos favorables $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7!$

$$P(A) = \frac{7!}{7^7} \approx 0'00612 .$$

Al probabilitat que busquem és el contrari de A:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{7!}{7^7} \approx 0'99388 .$$

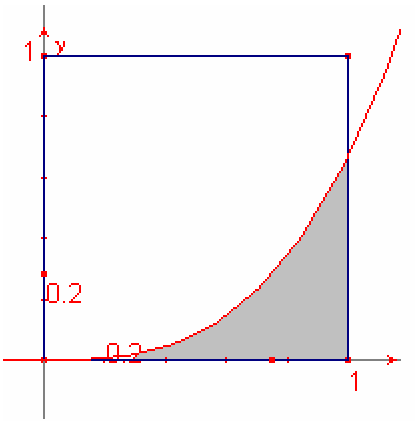
20.- Siga $M(a,b)$ un punt aleatori d'un quadrat Q de costat 1
$Q = \{(u,v) \ / \ 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1\}$.

Siga X = nombre de arrels reals del polinomi $P_{ab}(x) = \frac{1}{3}x^3 - a^2x + b$.

Calculeu la probabilitat que:

a) $P(X = 1)$

b) $P(X = 3)$



Solució:

$0 \le a \le 1, 0 \le b \le 1$

Calculem el màxim i el mínim de $P_{ab}(x)$.

$P_{ab}'(x) = x^2 - a^2$.

$P_{ab}'(x) = 0 \quad x^2 - a^2 = 0$.

Les solucions de l'equació són $x = -a, \ x = a$.

$P_{ab}''(x) = 2x$.

$P_{ab}''(-a) = -2a < 0$, aleshores, $x = -a$, és un màxim relatiu estricte.

$P_{ab}''(a) = 2a > 0$, aleshores, $x = a$, és un mínim relatiu estricte.

$$P_{ab}(-a) = \frac{-1}{3}a^3 + a^3 + b = \frac{2}{3}a^3 + b \ge 0.$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} P_{ab}(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} P_{ab}(x) = +\infty$. Aleshores, el polinomi $P_{ab}(x)$ sempre té almenys 1 arrel real.

El polinomi $P_{ab}(x)$ té només 1 arrel si $P_{ab}(a) > 0$ (ja que $P_{ab}(-a) \ge 0$).

El polinomi $P_{ab}(x)$ té 3 arrels si $P_{ab}(a) < 0$ (ja que $P_{ab}(-a) \ge 0$).

$$P_{ab}(a) = \frac{1}{3}a^3 - a^3 + b = -\frac{2}{3}a^3 + b.$$

b) Calculem $P(X = 3)$.

Vegem quan $-\frac{2}{3}a^3 + b < 0$.

Els punts $M(a,b)$ tal que $-\frac{2}{3}a^3 + b < 0$ esta sota la cúbica $b = \frac{2}{3}a^3$ dins del quadrat Q.

Calculem l'àrea d'aquest recinte:

$$S = \int_0^1 \frac{2}{3}a^3 \, da = \left.\frac{2}{3}\frac{a^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

$$P(X = 3) = \frac{S}{\text{àreaQ}} = \frac{1}{6}.$$

a) Calculem $P(X = 1) = 1 - P(X = 3) = \frac{5}{6}$.