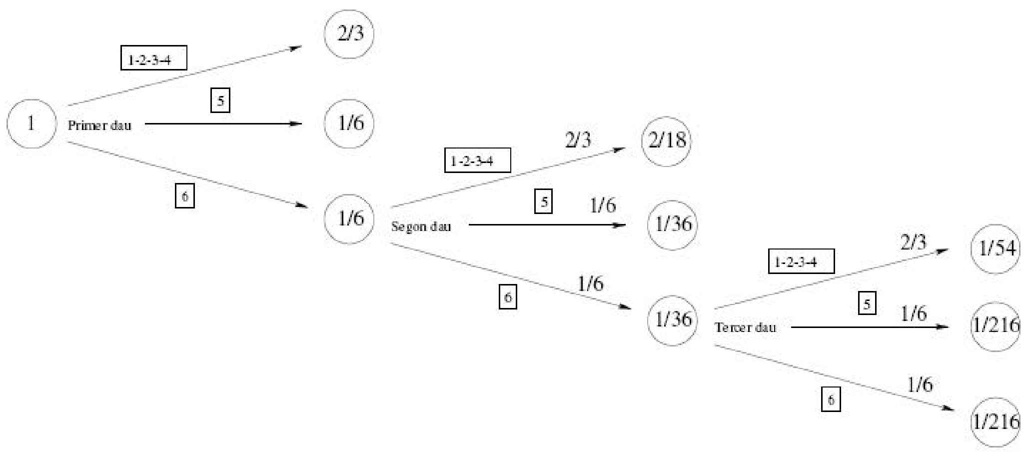
21.- En el joc dels parxís utilitzem un dau estàndard de sis cares. Considera els successos:
A = treure 1, 2, 3 o 4.
B= treure un cinc.
C= treure un sis.
Volem saber la probabilitat de eixir de casa (traient un 5) en una tirada típica del parxís.
Les regles diuen que quan treus un sis tornes a tirar, i que si et surten tres sisos consecutius te'n vas a casa. Per sortir de casa, necessites un cinc a la primera, o bé un sis i després un 5, o bé dos sisos i després un cinc.
Calculeu la probabilitat de poder sortir de casa en una jugada.

Solució:
L'arbre del problema és:



La probabilitat de eixir en una jugada és:

$$p=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{43}{216}.$$

22.- Un jugador de bàsquet ha de llançar dos tirs lliures.
Té una probabilitat 0’8 d’encertar el primer tir lliure.
Si encerta el primer, la probabilitat d’encerat el segon augmenta a 0’9, però si falla el primer, la probabilitat d’encertar el segon baixa a 0’6.
a) Hi ha independència entre els dos tirs?.
b) Calculeu la probabilitat que encerte els dos tirs lliures.
c) Calculeu la probabilitat que n’encerte només un
d) Calculeu la probabilitat que n’encerte algun.

Solució:
a)
Siga A = encertar el primer tir.
Siga B = encertar el segon tir.

$$P(A)=0'8=\frac{4}{5},\quad P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{1}{5}.$$

$$P(B\mid A)=0'9=\frac{9}{10},\quad P(\overline{B}\mid A)=1-P(B\mid A)=\frac{1}{10}.$$

$$P(B\mid \overline{A})=0'6=\frac{3}{5},\quad P(\overline{B}\mid \overline{A})=1-P(B\mid \overline{A})=\frac{2}{5}.$$

$$P(B)=P\left((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)\right)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=P(B\mid A)\cdot P(A)+P(B\mid \overline{A})\cdot P(\overline{A})=$$
$$=\frac{9}{10}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{21}{25}.$$

$P(B\mid A)\neq P(B)$ aleshores, els successos són dependents.

b)

$$P(A\cap B)=P(B\mid A)\cdot P(A)=\frac{9}{10}\cdot\frac{4}{5}=\frac{18}{25}.$$

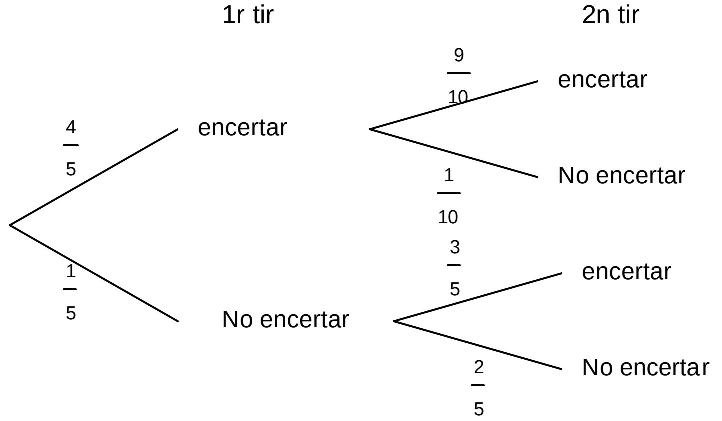
c)

$$P\left((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\right)=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{B}\mid A)\cdot P(A)+P(B\mid\overline{A})\cdot P(\overline{A})=$$
$$=\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}.$$

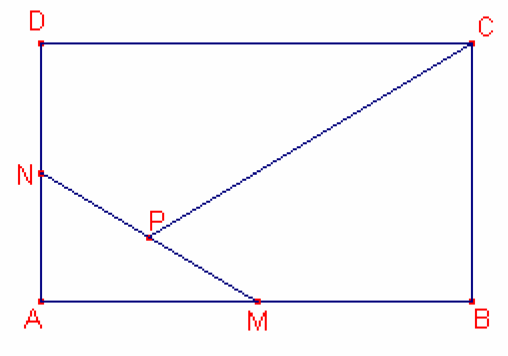
d)

$$1-P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(\overline{B}\mid\overline{A})\cdot P(\overline{A})=1-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{23}{25}.$$

L’arbre del problema:



23.- Des del punt mig d'un costat d'un rectangle, es traça un segment fins el punt mig del costat contigu. Des del punt mig del segment anterior es traça un altre segment fins el vèrtex oposat. Es pinta de roig el 30% del triangle rectangle i el 20% de cadascun dels quadrilàters que origina aquest segment.
a) Quina és la probabilitat que al llançar un dard caiga en zona roja? Es suposa que tots els dards es claven en el rectangle.
b) Un dard ha caigut en la zona roja, quina és la probabilitat que estiga dins del triangle?.
c) Si en lloc de traçar el segment de del punt mig, ho fem de d'un punt qualsevol de la hipotenusa, trobeu la probabilitat que el dard caiga en el quadrilàter de menor àrea en funció de la proporció entre la longitud del segment menor en què s'ha dividit la hipotenusa i la longitud d'aquesta.
Oposicions de València 2004.



Solució:
Siga ABCD un rectangle $a=\overline{AB}$, $b=\overline{AD}$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga N el punt mig del costat $\overline{AD}$.
Siga P el punt mig del segment $\overline{MN}$.
Calculem les àrees del triangle $\overset{\Delta}{AMN}$ i el quadrilàter NPCD.

$$S_{AMN}=\frac{\overline{AM}\cdot\overline{AN}}{2}=\frac{ab}{8}$$

$$S_{NPCD}=\frac{S_{ABCD}-S_{AMN}}{2}=\frac{ab-\frac{ab}{8}}{2}=\frac{7ab}{16}.$$

Siga T = Caure en zona roja.
Siga R_1 = caure en el triangle AMN.
Siga R_2 = caure en el quadrilàter NPCD.
Siga R_3 = caure en el quadrilàter MBCP.

$$P(R_1)=\frac{S_{AMN}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{ab}{8}}{ab}=\frac{1}{8},\quad P(R_2)=P(R_3)=\frac{S_{NPCD}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{7ab}{16}}{ab}=\frac{1}{16}.$$

$$P(T\,|\,R_1)=\frac{30}{100}=\frac{3}{10},\quad P(T\,|\,R_2)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}.$$

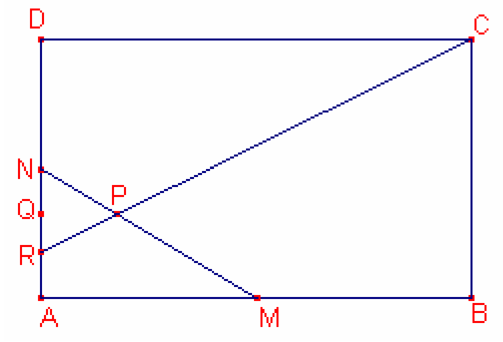
a)
Aplicant el teorema de la probabilitat total:

$$P(T)=P(T\,|\,R_1)\cdot P(R_1)+P(T\,|\,R_2)\cdot P(R_2)+P(T\,|\,R_3)\cdot P(R_3)=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16}=\frac{17}{80}$$

b)
Aplicant el teorema de Bayes:

$$P(R_1\,|\,T)=\frac{P(T\,|\,R_1)\cdot P(R_1)}{P(T)}=\frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{8}}{\frac{17}{80}}=\frac{3}{17}.$$

c)



Siga P, tal que $\frac{\overline{NP}}{\overline{MN}}=r$, $0\le r\le \frac{1}{2}$.

Siga R el punt on la recta PC talla el costat $\overline{AD}$.

Siga $h=\overline{PQ}$ l'altura del triangle $\overset{\Delta}{NRP}$.

Siga $x=\overline{NQ}$, $y=\overline{QR}$.

Aplicant el teorema de tales als triangles semblants $\overset{\Delta}{NQP}$, $\overset{\Delta}{NAM}$:

$$\frac{h}{\frac{a}{2}}=\frac{\overline{NP}}{\overline{MN}}=r,\quad h=\frac{a}{2}r.$$

$$\frac{x}{\frac{b}{2}}=\frac{\overline{NP}}{\overline{MN}}=r,\quad x=\frac{b}{2}r.$$

Aplicant el teorema de tales als triangles semblants $\overset{\Delta}{QPR}$, $\overset{\Delta}{DCR}$:

$$\frac{y}{\frac{b}{2}+x+y}=\frac{h}{a},\quad y=\frac{\frac{b}{2}h+hx}{a-h}=\frac{b}{2}\frac{r(r+1)}{2-r}.$$

$$x+y=\frac{b}{2}\frac{3r}{2-r}.$$

$$S_{DRC}=\frac{\left(\frac{b}{2}+x+y\right)a}{2}=\frac{ab}{2}\frac{1+r}{2-r}.$$

$$S_{NRP}=\frac{(x+y)h}{2}=\frac{ab}{8}\frac{3r^2}{2-r}.$$

Calculem l'àrea del quadrilàter NPCD:

$$S_{NPCD}=S_{DRC}-S_{NRP}=\frac{ab}{8}(3r+2).$$

Siga $X=$ Caure quadrilàter menor .

$$P(X)=\frac{2\cdot S_{NPCD}}{S_{ABCD}}=\frac{2\cdot\frac{ab}{8}(3r+2)}{ab}=\frac{3r+2}{4}.$$

c) Solució 2

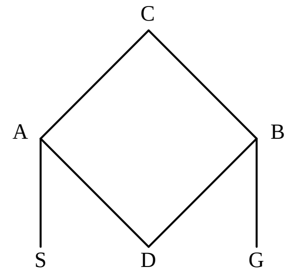
$$\frac{S_{CNP}}{S_{SCNM}}=\frac{\overline{NP}}{\overline{MN}}=r.$$

$$S_{CNM}=S_{ABCD}-\left(S_{AMN}+S_{NCD}+S_{MBC}\right)=ab-\left(\frac{ab}{8}+\frac{ab}{4}+\frac{ab}{4}\right)=\frac{3}{8}ab.$$

$$S_{CNP}=r\cdot S_{CNM}=\frac{3}{8}abr.$$

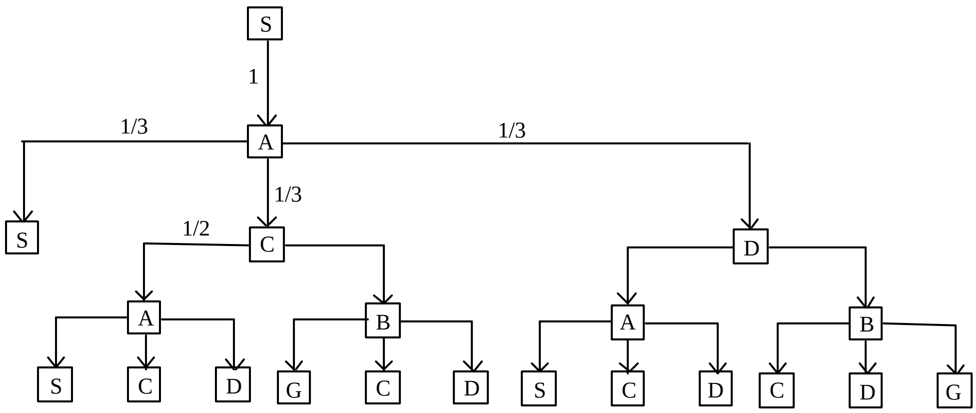
$$S_{NPCD}=S_{NCD}+S_{CNP}=\frac{ab}{4}+\frac{3ab}{8}r=\frac{ab}{8}(2+3r).$$

24.- Una màquina de jocs d’un casino té una pantalla en què s’ofereix un esquema com el de la figura. Per començar el joc apareix una bola en el punt S. A cada impuls que rep del jugador, aquesta bola es mou fins una de les lletres immediates amb la mateixa probabilitat per a cadascuna d’elles.



La partida finalitza al ocórrer el primer dels dos fets següents:
a) La bola torna a S i aleshores el jugador perd.
b) La bola arriba a G i aleshores el jugador guanya.
Es demana la probabilitat que el jugador guanye i la duració mitjana de las partides.
Oposicions Galícia 2005.

Solució (F. Bellot)
Podem representar el desenvolupament del joc mitjançant un diagrama d’arbre:



La probabilitat que el joc tinga longitud 2 és $\frac{1}{3}$.

La probabilitat que el joc tinga longitud 4 és : $\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{3}\bullet 2\bullet 2=\frac{2}{3^2}$

La probabilitat que el joc tinga longitud 6 és : $\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{3}\bullet 2\bullet 2\bullet 2\bullet\frac{1}{3}=\frac{2^2}{3^3}$, etc.,

en general la probabilitat que el joc tinga longitud 2n és: $\frac{2^{n-1}}{3^n}$.

Aleshores, la duració mitjana M d’un joc és la suma de cada longitud per la probabilitat respectiva :

$$M=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}2n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\bullet n$$

sèrie aritmètico-geomètrica que es suma pel mateix mètode que la geomètrica:

$$M-\frac{2}{3}M=\frac{M}{3}=\frac{2}{3}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\frac{2}{3}}=2\Rightarrow M=2\bullet 3=6$$

La probabilitat P de guanyar serà la suma de les probabilitats de guanyar en 4 passos més la que guanye en 6 passos ...etc.:

$$P=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{2^2}{3^4}+....=\frac{1}{3}.$$

25.- Es realitza un joc entre dos jugadors A i B.
En cada partida, la probabilitat de guanye A és p, la probabilitat que guanye B és q, la probabilitat que queden en taules (empat) és r.
Guanya el joc el jugador que guanye dues partides.
Calculeu la probabilitat que guanye el joc A.
Oposicions de Galícia 2005.

Solució: Me la va passar Óscar Ferreira.

Definim els successos:
$A_1 = \text{guanya el joc A havent guanyat B una partida}$.
$A_0 = \text{guanya el joc A sense haver guanyat B cap partida}$.
$A = \text{guanya el joc A}$.
$A_{i1} = \text{guanya el joc A en la i-èsima partida havent guanyat B una partida}$
$A_{i0} = \text{guanya el joc A en la partida i-èsima sense haver guanyat B cap partida}$
Els successos A_0 , A_1 són incompatibles.
Els successos A_{i0} , A_{i1} són incompatibles dos a dos.
$A = A_1 \cup A_0 = \left(\bigcup_{i=3}^{\infty} A_{i1}\right) \cup \left(\bigcup_{i=2}^{\infty} A_{i0}\right)$.

Calculem $P(A_0) = \sum_{i=2}^{\infty} P(A_{i0})$.
Una de los formes possibles en que pot aparéixer A_{i0} amb $(i-2$ T taules) és:
TATTTT....TA sense aparéixer B cap vegada i una A al final. Els casos favorables són $i-1$ llocs que poc ocupar la A.
La probabilitat d'aquest succés és $r^{i-2} \cdot p^2$.

$$P(A_0) = \sum_{i=2}^{\infty} P(A_{i0}) = \sum_{i=2}^{\infty} (i-1) \cdot r^{i-2} \cdot p^2 .$$

Calculem aquesta suma:

Siga $S = \sum_{i=2}^{\infty} (i-1) \cdot r^{i-2}$.

$S = 1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + ...$
$r \cdot S = r + 2r^2 + 3r^3 + 4r^4 + ...$
Restant les igualtats:
$S - r \cdot S = 1 + r + r^2 + r^3 + ...$
La suma infinita dels termes duna successió geomètrica de raó $0 < r < 1$

$$S - r \cdot S = 1 + r + r^2 + r^3 + ... = \frac{1}{1-r}$$

Aleshores, $S = \frac{1}{(1-r)^2}$

Per tant,

$$P(A_0) = \sum_{i=2}^{\infty} (i-1) \cdot r^{i-2} \cdot p^2 = p^2 \cdot \frac{1}{(1-r)^2}$$

Calculem $P(A_1)=\sum_{i=3}^{\infty}P(A_{i1})$.

Una de los formes possibles en que pot aparéixer A_{i1} amb ($i-3$, T taules) és:
TBATTTT....TA B guanya una vegada i una A al final. Els casos favorables són $i-1$ llocs que poc ocupar la A.
Els cassos possibles són:

$$PR_{i-1}^{i-3,1,1}=\frac{(i-1)!}{(i-3)!\cdot 1!\cdot 1!}=(i-1)(i-2).$$

La probabilitat de cada succés és $r^{i-3}\cdot p^2\cdot q$.
Aleshores:

$$P(A_1)=\sum_{i=3}^{\infty}P(A_{i1})=\sum_{i=2}^{\infty}(i-1)(i-2)\cdot r^{i-3}\cdot p^2\cdot q$$

Calculem aquesta suma:

Siga $S=\sum_{i=3}^{\infty}(i-1)(i-2)\cdot r^{i-3}$.

$$S=2+3\cdot 2\cdot r+4\cdot 3\cdot r^2+5\cdot 4\cdot r^3+............$$

$$r\cdot S=2r+3\cdot 2\cdot r^2+4\cdot 3\cdot r^3+5\cdot 4\cdot r^4+.........$$

Restant les dues igualtats:

$$S-r\cdot S=2+4r+6r^2+8r^3+.......=2\left(1+2r+3r^2+4r^3+......\right)=2\frac{1}{(1-r)^2}.$$

Aleshores, $S=\frac{2}{(1-r)^3}$

$$P(A_1)=\sum_{i=2}^{\infty}(i-1)(i-2)\cdot r^{i-3}\cdot p^2\cdot q=p^2\cdot q\cdot\frac{2}{(1-r)^3}.$$

Aleshores,

$$P(A)=P(A_0)+P(A_1)=p^2\frac{1}{(1-r)^2}+p^2\cdot q\cdot\frac{2}{(1-r)^3}=\frac{p^2(1-r)+2p^2q}{(1-r)^3}.$$

26.- Escolliu a l'atzar un nombre entre $\{1, 2, 3, ...,n\}$. Calculeu:

a) La probabilitat p_1 que el nombre escollit siga divisible per k. Calculeu $\lim\limits_{n\to\infty} p_1$.

b) La probabilitat p_2 que l nombre escollit no siga divisible ni per r ni per s, essent r, s primers entre ells.
Calculeu $\lim\limits_{n\to\infty} p_2$.

c) La probabilitat p_3 que el nombre escollit siga a i a^2-1 siga divisible per 10.
Calculeu $\lim\limits_{n\to\infty} p_3$.

Solució:
a)
Siga $[x]=$ part entera de x.
Siga X_k = el nombre escollit siga divisible per k.
Casos possibles n.

k, 2k, 3k,......., rk tal que $rk\le n$, $r=\left[\frac{n}{k}\right]$

Casos favorables $r=\left[\frac{n}{k}\right]$.

$$p_1=\frac{\left[\frac{n}{k}\right]}{n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} p_1=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{n}{k}\right]}{n}, \text{ ja que } \frac{n-1}{k}\le\left[\frac{n}{k}\right]\le\frac{n}{k}.$$

b)
Siga X = nombre escollit no siga divisible ni per r ni per s.
mcd(r,s)=1, $\text{mcm}(r,s)=rs$.

$$X=\overline{X_r\cup X_s}$$

$$p_2=P\left(\overline{X_r\cup X_s}\right)=1-\left(P(X_r)+P(X_s)-P(X_r\cap X_s)\right).$$

$X_r\cap X_s=$ el nombre escollit múltiple de r i s $=$ el nombre escollit és múltiple de $r\cdot s$.

$$P(X_r)=\frac{\left[\frac{n}{r}\right]}{n},\quad P(X_s)=\frac{\left[\frac{n}{s}\right]}{n},\quad P(X_r\cap X_s)=\frac{\left[\frac{n}{rs}\right]}{n}.$$

$$p_2=1-\left(P(X_r)+P(X_s)-P(X_r\cap X_s)\right)=1-\left(\frac{1}{n}\left[\frac{n}{r}\right]+\frac{1}{n}\left[\frac{n}{s}\right]-\frac{1}{n}\left[\frac{n}{rs}\right]\right).$$

$$\lim_{n\to\infty} p_2=\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{1}{n}\left[\frac{n}{r}\right]+\frac{1}{n}\left[\frac{n}{s}\right]-\frac{1}{n}\left[\frac{n}{rs}\right]\right)\right)=1-\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}-\frac{1}{rs}\right)=\left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1-\frac{1}{s}\right).$$

c)
Si $a^2\equiv 1(\text{mòd }10)$ aleshores, $a\equiv 1(\text{mòd }10)$ o bé $a\equiv 9(\text{mòd }10)$.
És a dir, el nombre a és acabat amb 1 o amb 9.
Siga $n=10k+m$, $m=0$, $1\le m<9$, $m=9$

Aleshores, la probabilitat és:

$$p_3 = \begin{cases} \dfrac{2k}{n} & \text{si } m = 0 \\ \dfrac{2k+1}{n} & \text{si } 1 \le m < 9 \\ \dfrac{2k+2}{n} & \text{si } m = 9 \end{cases}.$$

En tots tres casos: $\lim\limits_{n\to\infty} p_3 = \dfrac{1}{5}$.

$k = \dfrac{n-m}{10}$.

Si $m = 0$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2k}{n} = \dfrac{2\frac{n}{10}}{n} = \dfrac{1}{5}$.

Si $1 \le m < 9$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2k+1}{n} = \dfrac{2\frac{n-m}{10}+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-m+5}{5n} = \dfrac{1}{5}$.

Si $m = 9$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2k+2}{n} = \dfrac{2\frac{n-9}{10}+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-4}{5n} = \dfrac{1}{5}$.

27.- Siga un sorteig entre els números de 4 xifres del 0000 al 9999.
Guanya el número que les dues primeres xifres sumen el mateix que les dues últimes.
Calculeu la probabilitat de guanyar.

Solució:
Casos possibles 10000.
La suma de dues xifres està entre 0,1,2,.........,18.

Sumes	casos
0 ó 18	1
1 ó 17	2
2 ó 16	3
3 ó 15	4
4 ó 14	5
5 ó 13	6
6 ó 12	7
7 ó 11	8
8 ó 10	9
9	10

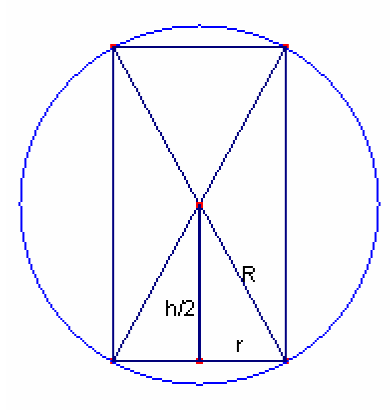
Siga $X_i = \text{suma de dues xifres siga i}$.
Siga $n_i = \text{núm. casos que la suma de dues xifres siga i}$.
Siga X = les dues primeres xifres sumen el mateix que les dues últimes.

$$P(X) = \frac{\sum_{i=0}^{18} n_i^2}{1000} = \frac{2\cdot\left(1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots+9^2\right)+10^2}{10000} = \frac{1}{10000}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+\frac{9\cdot 10\cdot 19}{6}\right) = \frac{67}{1000}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

28.- Un cilindre circular recte homogeni es llança a l'atzar sobre un plànol horitzontal.
El radi del cilindre és r i l'altura és h.
Determineu la probabilitat que el cilindre caiga sobre la superfície lateral.
Calculeu la probabilitat que caiga sobre la superfície lateral si $h = 2r$.
Per a quins valors de h i r la probabilitat que caiga sobre alguna de les dues base o que caiga sobre la superfície lateral són iguals.

Solució:
Com el cilindre és homogeni, el seu centre de gravetat coincideix amb el centre de gravetat de l'esfera circumscrita al cilindre.
El cilindre caurà sobre la superfície lateral si la projecció del centre de gravetat sobre la superfície intersecta la superfície lateral.
La probabilitat ve determinada per la superfície de la zona esfèrica que afita la superfície lateral del cilindre.



Siga R el radi de l'esfera.
Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2.$$

L'àrea de l'esfera és:

$$S_{Esfera} = 4\pi R^2.$$

L'àrea de la zona de l'esfera és:

$$S_{Zona} = 2\pi Rh.$$

a)
La probabilitat que el cilindre caiga sobre la superfície lateral és:

$$p = \frac{S_{Zona}}{S_{Esfera}} = \frac{2\pi Rh}{4\pi R^2} = \frac{h}{2R} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4r^2}}.$$

b)
Si $h = 2r$.

$$p = \frac{2r}{\sqrt{4r^2 + 4r^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

c)
Les probabilitats són iguals si $p = \frac{1}{2}$.

$$\frac{h}{\sqrt{h^2 + 4r^2}} = \frac{1}{2}.$$

Elevant al quadrat i simplificant:

$$\frac{r}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

29.- Tenim sis boles de colors diferents que s'han de col·locar totes a l'atzar en tres urnes U_1, U_2 i U_3. Calculeu:
a) La probabilitat que la urna U_3 quede buida.
b) La probabilitat que vagen tantes boles a la urna com el nombre d'ordre de l'urna.
c) La probabilitat que totes les urnes estiguen ocupades.
Oposicions Catalunya 2005.

Solució: Me la va donar Óscar Ferreira.
Siguen les boles $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$.
Casos possibles $VR_{3,6} = 3^6$.

a)
X = la urna U_3 quede buida.
Si l'urna U_3 queda buida les boles han d'estar en les urnes U_1, U_2.
Casos favorables $VR_{2,6} = 2^6$.
La probabilitat del succés és:

$$P(X) = \frac{2^6}{3^6} = \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}.$$

b)
Y = La urna U_1, tinga 1 bola, que la urna U_2 tinga 2 boles i que la urna U_3 tinga 3 boles.

Les formes d'escollir una bola per a col·locar la en U_1 són $C_{6,1} = \binom{6}{1} = 6$.

A la urna U_2 posen 2 boles; les fornes d'escollir són $C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$.

Les 3 que queden les posem en l'urna U_3; les formes d'escollir són $C_{33} = \binom{3}{3} = 1$.

Els casos favorables són: $C_{6,1} \cdot C_{5,2} \cdot C_{3,3} = 6 \cdot 10 \cdot 1 = 60$.
La probabilitat del succés és:

$$P(Y) = \frac{60}{3^6} = \frac{20}{243}.$$

c)
Siguen els successos:
$S_1 = \text{la urna } U_1$ quede buida .
$S_2 = \text{la urna } U_2$ quede buida .
$S_3 = \text{la urna } U_3$ quede buida .
$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ que alguna urna quede buida.

$P(S) = P(S_1 \cup S_2 \cup S_3) =$
$= P(S_1) + P(S_2) + P(S_3) - P(S_1 \cap S_2) - P(S_1 \cap S_3) - P(S_2 \cap S_3) + P(S_1 \cap S_2 \cap S_3)$

Per l'apartat a) $P(S_i) = \left(\frac{2}{3}\right)^6 \quad 1 \le i \le 3$.

$S_1 \cap S_2 = \text{col·locar totes les boles en } U_3$. $P(S_1 \cap S_2) = \frac{1}{3^6}$.

Anàlogament $P(S_1 \cap S_3) = \frac{1}{3^6}$, $P(S_2 \cap S_3) = \frac{1}{3^6}$.

$S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \varnothing$. Aleshores, $P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = 0$.

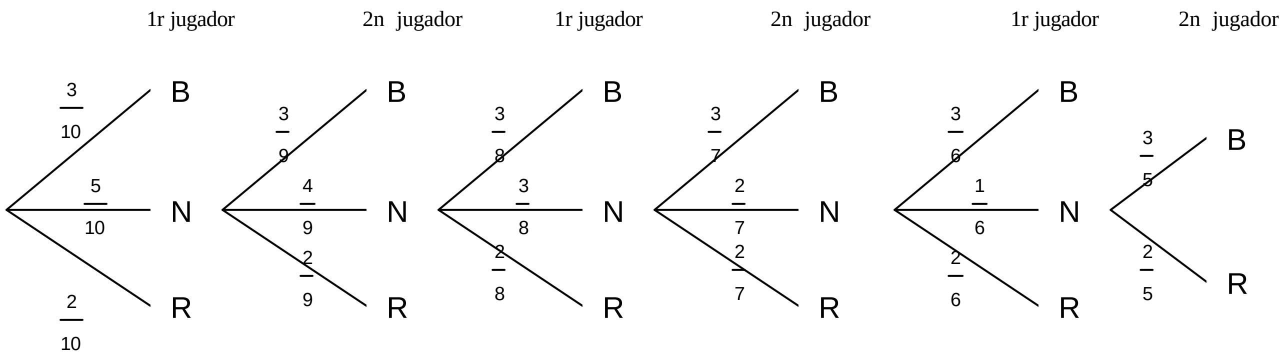
$P(S) = P(S_1 \bigcup S_2 \cup S_3) =$
$= P(S_1) + P(S_2) + P(S_3) - P(S_1 \cap S_2) - P(S_1 \cap S_3) - P(S_2 \cap S_3) + P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) =$
$= 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 + 0 = \frac{2^6 - 1}{3^5} = \frac{63}{3^5}$.

$\overline{S} =$ que totes les urnes estiguen ocupades.

$P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 1 - \frac{63}{3^5} = \frac{180}{243}$.

30.- Una urna conté 3 boles blanques, 5 negres i 2 roges.
Dos jugador extreuen per tanda les boles d'una urna sense reposició.
Guanya el primer que trau bola blanca. Si apareix bola roja és empat.
Siguen, $A_1 = \{\text{guanya el primer que juga}\}$, $A_2 = \{\text{guanya el segon que juga}\}$,
$B = \{\text{hi ha empat}\}$.
Calculeu $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(B)$.

Solució:
El diagrama d'arbre del problema és:



$$P(A_1) = \frac{3}{10} + \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8} + \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{6} = \frac{83}{210}.$$

$$P(A_2) = \frac{5}{10}\cdot\frac{3}{9} + \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{7} + \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{43}{210}.$$

$$P(B) = 1 - \left(P(A_1) + P(A_2)\right) = 1 - \left(\frac{83}{210} + \frac{43}{210}\right) = \frac{84}{210} = \frac{2}{5}.$$