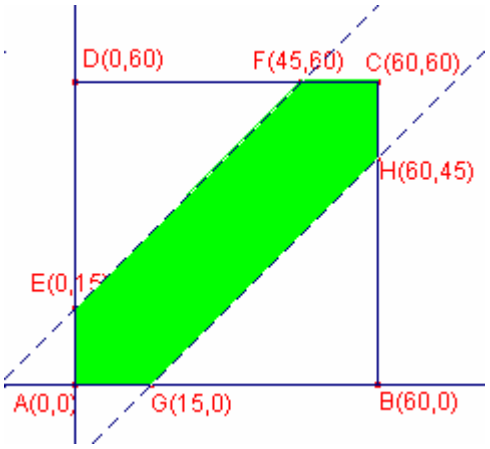
31.- Problema de trobada.
Dos amics van convenir trobar-se en un lloc determinat entre les 12h i les 13h. El primer que arribara esperaria el segon un quart d'hora, després d'aquest temps marxaria. Determineu la probabilitat que la trobada tinguera lloc si cada amic escull a l'atzar el temps d'arribada.

Solució
Seleccionar temps P, Q en l'interval $[0,60]$ equival a seleccionar un punt M(x,y) en el quadrat de costat 60.



Les coordenades de M han d'acomplir que:
$|x-y| \le 15$

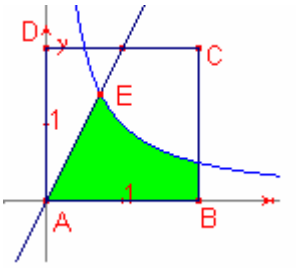
$$\begin{cases} x-y \le 15 \\ y-x \le 15 \end{cases}$$

Siga X = la trobada dels amic és realitza.
Els casos possibles és l'àrea del quadrat de costat 60.
Els casos favorables és l'àrea de la superfície
$\begin{cases} x-y \le 15 \\ y-x \le 15 \end{cases}$ és a dir la superfície afitada per les rectes
$x-y=15$, $y-x=15$.

Siga ABCD el quadrat de costat 60.
La recta $y-x=15$ passa pels punts $E(0,15), F(45,60)$.
La recta $x-y=15$ passa pels punts $G(15,0), H(60,45)$.
L'àrea del hexàgon AGHCFE és:
$S_{AGHCFE} = S_{ABCD} - 2 \cdot S_{GBH} = 60^2 - 45^2$.

La probabilitat de X és:
$$p(X) = \frac{S_{AGHCFE}}{S_{ABCD}} = \frac{60^2 - 45^2}{60^2} = \frac{7}{16}.$$

32.- Si seleccionem dos nombres reals positius a l'atzar, x, y tal que siguen menors o igual que 2, determineu la probabilitat que el producte xy siga menor o igua que 1 i el quocient $\frac{y}{x}$ siga menor o igual que 2.



Solució:
L'experiment és equivalent a escollir un punt aleatori M(x,y) en el quadrat de costat 2 tal que

$\begin{cases} xy \le 1 \\ \frac{y}{x} \le 2 \end{cases}$, per ser x, y positius:

$\begin{cases} xy \le 1 \\ y \le 2x \end{cases}$.

Els casos possibles són l'àrea del quadrat de costat 2
Els casos favorables és l'àrea de la regió dins del quadrat afitada per la recta $y = 2x$, la hipèrbola $y = \frac{1}{x}$ i l'eix d'abscisses.
Determinem el punt E intersecció de la recta i la paràbola:

$$\begin{cases} xy = 1 \\ y = 2x \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}, \quad E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right).$$

L'àrea afitada és:

$$S = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2x\,dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{2} \frac{1}{x}dx = x^2\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \ln x\ \Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\ln 2.$$

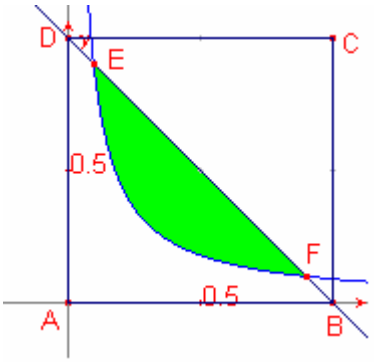
La probabilitat és:

$$p = \frac{S}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\ln 2}{4} = \frac{1 + 3\ln 2}{8}.$$

33.- Si seleccionem dos nombres reals positius a l'atzar, x, y tal que siguen menors o igual que 1, determineu la probabilitat que el producte xy siga major o igual que 0'09 i el la suma $x+y$ siga menor o igual que 1.

Solució:
L'experiment és equivalent a escollir un punt aleatori M(x,y) en el quadrat de costat 2 tal que

$$\begin{cases} xy \geq 0'09 \\ x+y \leq 1 \end{cases}.$$



Els casos possibles són l'àrea del quadrat de costat 1
Els casos favorables és l'àrea de la regió dins del quadrat afitada per la recta $y=-x+1$, la hipèrbola $y=\frac{0'09}{x}$.

Determinem els punt E, F intersecció de la recta i la paràbola:

$$\begin{cases} xy = 0'09 \\ y = -x+1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0'1 \\ y = 0'9 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0'9 \\ y = 0'1 \end{cases} \quad E(0'1,0'9),\ F(0'9,0'1).$$

L'àrea afitada és:

$$S = \int_{0'1}^{0'9}\left(-x+1-\frac{0'09}{x}\right)dx = \left.\frac{-x^2}{2}+x-0'09\cdot\ln(x)\right]_{0'1}^{0'9} = \frac{2}{5}-\frac{9}{50}\ln 3 \approx 0'20225\ .$$

34.- Siguen tres successos A, B, C independents dos a dos, tal que els tres junts són incompatibles. Suposant que els tres tenen probabilitat p. Determineu el màxim valor de p.

Solució:
Per ser independents dos a dos:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$

$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

Per ser els tres junts són incompatibles:

$P(A \cap B \cap C) = P(\varnothing) = 0$

Siga $P(A \cup B \cup C) = k$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

$k = p + p + p - p^2 - p^2 - p^2 + 0$

$3p - 3p^2 = k$

Resolent l'equació en p:

$p = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 12k}}{6} \qquad 0 \le k \le \dfrac{3}{4}$

El màxim de les dues funcions:

S'assoleix en $k = \dfrac{3}{4}$.

Aleshores el valor màxim de p és:

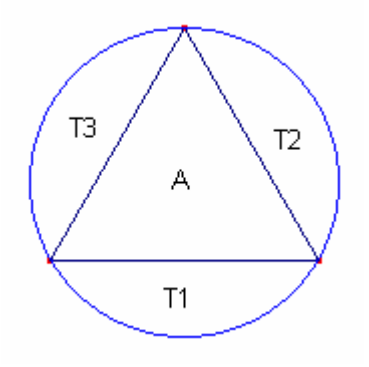
$p = \dfrac{3 \pm 0}{6} = \dfrac{1}{2}$.

35.- Quants daus s'han de llançar a fi que la probabilitat que no aparega cap 6 siga menor o igual que 0'3.

Solució:
Siga el succés A = en n llançaments de daus no aparega cap 6.
Per hipòtesi $P(A) \leq 0'3$ (1)
Siga A_i = en el llançament i no isca 6
$A = A_1 \cap A_2 \cap ..... \cap A_n$
Els successos A_i són independents.
$P(A_i) = \frac{5}{6}$.
$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap ..... \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \qquad (2)$$
De les expressions (1) i (2) tenim que:
$$\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq \frac{3}{10}.$$
Resolem la inequació:
$n \cdot \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln\left(\frac{3}{10}\right)$, com que $\frac{5}{6} < 1$, $\ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0$.
Aleshores:
$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{3}{10}\right)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 6'6036.$$
Aleshores, $n \geq 7$.

36.- En un cercle de radi R està inscrit un triangle equilàter.
Dins del cercle es marquen 4 punts a l'atzar. Calculeu la probabilitat que:
a) Els 4 punts caiguen dins del triangle.
b) Cada punt cau en cadascuna de les 4 regions distintes que determinen el triangle i el cercle.

Solució:
a)
Siga el succés A = marcar 1 punt en el cercle i que caiga dins del triangle



Els casos possible són l'àrea del cercle πR^2
Els casos favorables és l'àrea del triangle equilàter inscrit en el cercle.
L'àrea del triangle inscrit en el cercle és:
$\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.
Aleshores, la probabilitat de A és:
$P(A)=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Siga el succés X = marcar 4 punts en el cercle i que caiguen dins del triangle:
Siga X_i = La marca i caiga en el triangle
Els successos X_i són independents dos a dos.
$P(X_i)=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.
$X=X_1\cap X_2\cap X_3\cap X_4$.
$P(X)=\left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^4\approx 0'029234$.

b)
Siguen les regions: A el triangle, T_1, T_2, T_3 cadascun dels tres segments circulars
L'àrea del segment circular és:
$$\frac{\pi R^2-\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2}{3}=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12}R^2.$$

Siga el succés Y = Cada punt cau en cadascuna de les 4 regions distintes que determinen el triangle i el cercle.
La probabilitat de que un llançament caiga en T_i és:
$$P(T_i)=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12\pi}$$
Hi ha $4!$ maneres distintes favorables de marcar-les
$$P(Y)=4!\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\left(\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^3\approx 0'00011875.$$

37.- Una urna conté 8 boles blanques i 2 negres. Una altra urna conté 4 boles blanques i 16 negres. De cada urna s'extrau una bola a l'atzar i d'aquestes 2 boles s'extrau una d'elles a l'atzar. Calculeu la probabilitat que que la bola extreta siga blanca.

Solució:
Siguen els successos:

$A_{11} = \text{traure blanca de la primera urna i traure blanca de la segona urna}$.

$A_{12} = \text{traure blanca de la primera urna i traure negra de la segona urna}$.

$A_{21} = \text{traure negra de la primera urna i traure blanca de la segona urna}$.

$A_{22} = \text{traure negra de la primera urna i traure negra de la segona urna}$.

Els successos són incompatibles dos a dos i la unió és el succés segur.
Siga el succés, $X = \text{traure bola blanca de les dues tretes abans}$.

$$P(A_{11}) = \frac{8}{10}\frac{4}{20} = \frac{4}{25}.$$

$$P(A_{12}) = \frac{8}{10}\frac{16}{20} = \frac{16}{25}.$$

$$P(A_{21}) = \frac{2}{10}\frac{4}{20} = \frac{1}{25}.$$

$$P(A_{22}) = \frac{2}{10}\frac{16}{20} = \frac{4}{25}.$$

$$P(X \mid A_{11}) = 1.$$

$$P(X \mid A_{12}) = \frac{1}{2}.$$

$$P(X \mid A_{21}) = \frac{1}{2}.$$

$$P(X \mid A_{11}) = 0.$$

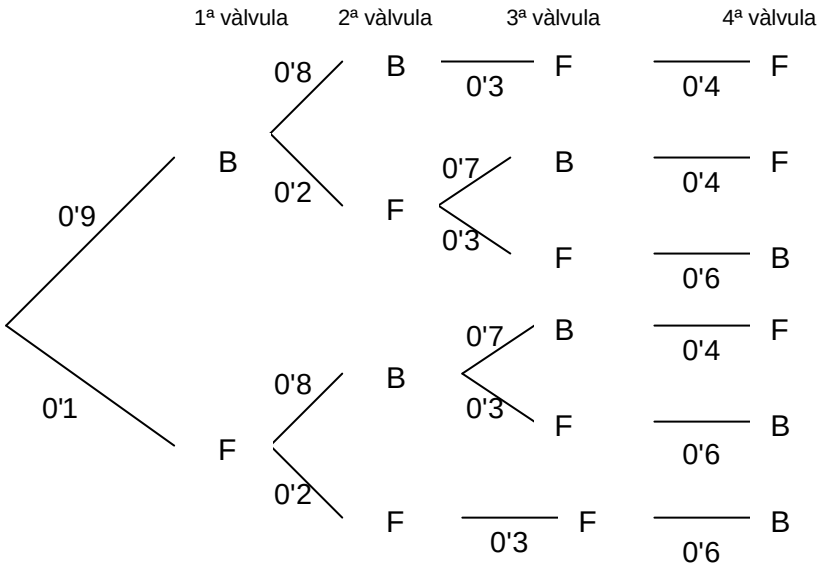
Aplicant el teorema de la probabilitat total:

$$P(X) = P(A_{11}) \cdot P(X \mid A_{11}) + P(A_{12}) \cdot P(X \mid A_{12}) + P(A_{21})P(X \mid A_{21}) + P(A_{22}) \cdot P(X \mid A_{22}) =$$

$$= \frac{4}{25} \cdot 1 + \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{25} \cdot 0 = \frac{1}{2}.$$

38.- Dues de quatre vàlvules d'un aparell que funcionen independentment han fallat. Determineu la probabilitat que fallen les vàlvules primera i segona si les probabilitats de fallo de les vàlvules primera, segona, tercera i quarta són respectivament iguals a: $p_1 = 0'1, p_2 = 0'2, p_3 = 0'3, p_4 = 0'4$.

Solució:
Construïm el següent diagrama d'arbre:



Siguen els successos:
X = que fallen dues vàlvules.
Y = que fallen les vàlvules primera i segona.

$$P(Y \mid X) = \frac{0'1 \cdot 0'2 \cdot 0'7 \cdot 0'6}{0'9 \cdot 0'8 \cdot 0'3 \cdot 0'4 + 0'9 \cdot 0'2 \cdot 0'7 \cdot 0'4 + 0'9 \cdot 0'2 \cdot 0'3 \cdot 0'6 + 0'1 \cdot 0'8 \cdot 0'7 \cdot 0'4 + 0'1 \cdot 0'8 \cdot 0'3 \cdot 0'6 + 0'1 \cdot 0'2 \cdot 0'7 \cdot 0'6} = \frac{21}{536}$$

39.- En una bossa hi ha 4 boles negres i 5 blanques. En una altra bossa hi ha 2 negres i 3 blanques.
S'escull una bossa a l'atzar i s'extrau una bola. Calculeu la probabilitat:
a) Que bola extreta siga negra.
b) Que la bossa escollida siga la primera sabent que la bola és negra.

Solució:
Siguen els successos:
T = traure bola negra.

$A_1 = \text{escollir la primera bossa}$

$A_2 = \text{escollir la segona bossa}$

$A_1 \cap A_2 = \varnothing, \quad A_1 \cup A_2 = \Omega$

$P(A_1) = \frac{1}{2}, \quad P(A_2) = \frac{1}{2}$

$P(T \mid A_1) = \frac{4}{9}.$

$P(T \mid A_1) = \frac{2}{3}.$

a) Aplicant el teorema de la probabilitat total:

$$P(T) = P(T \mid A_1) \cdot P(A_1) + P(T \mid A_2) \cdot P(A_2) = \frac{4}{9}\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{19}{45}.$$

b) Aplicant la fórmula de Bayes:

$$P(A_1 \mid T) = \frac{P(T \mid A_1) \cdot P(A_1)}{P(T \mid A_1) \cdot P(A_1) + P(T \mid A_2) \cdot P(A_2)} = \frac{\frac{4}{9}\frac{1}{2}}{\frac{4}{9}\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\frac{1}{2}} = \frac{10}{19}.$$

40.- Dues persones A i B, juguen una competició d'escacs, la qual serà guanyada pel primer dels dos jugadors que guanye dues partides. Les probabilitats que té A de guanyar, fer taules o perdre una partida són a, b, c, respectivament.
Calculeu la probabilitat que guanye A en la competició.

Solució:
A fi que A guanye s'han de celebrar $n+2$ partides amb $n=0,1,2,.....$
La probabilitat que A guanye la competició en la partida $n+2$ exactament és:

$$a^2 \quad \text{si} \quad n=0$$

$$\binom{n+1}{1}a^2b^2 + PR_{2+1}^{1,1,n-2}a^2cb^{n-1} \quad \text{si} \quad n \geq 1.$$

Aleshores la probabilitat buscada és:

$$p = a^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a^2b^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)na^2cb^{n-1} = a^2 + a^2\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b^n + a^2c\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nb^{n-1} =$$

$$= a^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b^n + a^2c \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nb^{n-1}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n \cdot x^{n-1} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Aleshores:

$$p = a^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b^n + a^2c \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nb^{n-1} = a^2\frac{1}{(1-b)^2} + a^2c\frac{2}{(1-b)^3}.$$