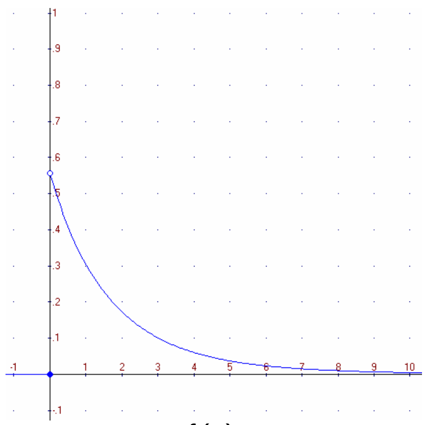
41.- La durada en minuts d'una trucada telefònica de llarga distància, s'assimila a una variable aleatòria X amb una funció de distribució:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{quan } x\le 0\\ 1-\frac{2}{3}e^{\frac{-2x}{3}}-\frac{1}{3}e^{\frac{-x}{3}} & \text{quan } x>0\end{cases}$$. Es demana:

a) L'esperança matemàtica o durada mitjana.
b) La probabilitat que la durada d'una trucada estiga compresa entre 3 i 6 minuts.
c) Una trucada ja porta 3 minuts. Probabilitat que no passe dels 6 minuts.

Solució:
Calculem la funció de densitat de probabilitat $f(x)$.

$F'_X(x)=f(x)$, aleshores: $$f(x)=\begin{cases}0 & \text{quan } x\le 0\\ \frac{4}{9}e^{\frac{-2x}{3}}+\frac{1}{9}e^{\frac{-x}{3}} & \text{quan } x>0\end{cases}$$


$f(x)$

a) L'esperança matemàtica és:

$$\mu=E(X)=\int_0^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\frac{4}{9}\int_0^{+\infty}x\cdot e^{\frac{-2x}{3}}dx+\frac{1}{9}\int_0^{+\infty}x\cdot e^{\frac{-x}{3}}dx.$$

$$\int x\cdot e^{\frac{-2x}{3}}dx=\frac{-3}{2}x\cdot e^{\frac{-2x}{3}}+\frac{3}{2}\int e^{\frac{-2x}{3}}dx=\frac{-3}{2}x\cdot e^{\frac{-2x}{3}}-\frac{9}{4}e^{\frac{-2x}{3}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll}u=x & dx=dx\\ dv=e^{\frac{-2x}{3}}dx & v=\frac{-3}{2}e^{\frac{-2x}{3}}\end{array}}$$

$$\int x\cdot e^{\frac{-x}{3}}dx=-3x\cdot e^{\frac{-x}{3}}+3\int e^{\frac{-x}{3}}dx=\frac{-3}{2}x\cdot e^{\frac{-x}{3}}-9e^{\frac{-x}{3}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll}u=x & dx=dx\\ dv=e^{\frac{-x}{3}}dx & v=-3e^{\frac{-x}{3}}\end{array}}$$

Aleshores, $\mu=E(X)=\int_0^{+\infty}x\cdot f(x)dx=2$.

b)
Siga A = la durada d'una trucada estiga compresa entre 3 i 6 minuts.

$$P(A)=F_X(6)-F_X(3)=\left(1-\frac{2}{3}e^{-4}-\frac{1}{3}e^{-2}\right)-\left(1-\frac{2}{3}e^{-2}-\frac{1}{3}e^{-1}\right)=\frac{e^3-2}{3e^4}\approx 0'1104.$$

c)
Siga B = la durada de la trucada siga major de 3 minuts.
Siga C = la durada de la trucada siga menor de 6 minuts.

$$P(B)=1-F_X(3)=1-\left(1-\frac{2}{3}e^{-2}-\frac{1}{3}e^{-1}\right)=\frac{2}{3}e^{-2}+\frac{1}{3}e^{-1}.$$

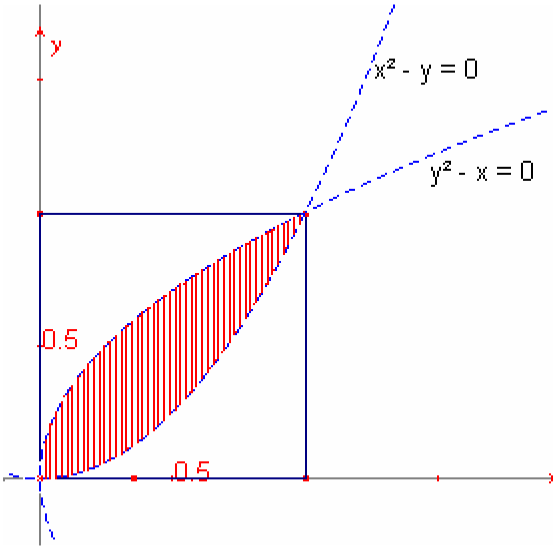
$$P(C)=F_X(6)=1-\frac{2}{3}e^{-4}-\frac{1}{3}e^{-2}.$$

$$P(C\mid B)=\frac{P(B\cap C)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{e^3-2}{3e^4}}{\frac{3+e}{3e^2}}=\frac{e^3-2}{e^2(e+3)}\approx 0'4280.$$

42.- Escollim dos nombres a l'atzar entre 0 i 1. Quina és la probabilitat que el primer siga més gran o igual que el quadrat del segon i, al mateix temps, que el segon siga més gran o igual que el quadrat del primer?.
Oposicions Catalunya 1993.

Solució:
L'experiment és equivalent a escollir un punt aleatori M(x,y) en el quadrat de costat 1 tal que

$$\begin{cases} x \geq y^2 \\ y \geq x^2 \end{cases}.$$



Els casos possibles són l'àrea del quadrat de costat 1
Els casos favorables és l'àrea de la regió dins del quadrat afitada per les paràboles

$x = y^2$, $y = x^2$.

La intersecció de les dues paràboles són els punts (0,0), (1,1).

L'àrea afitada és:

$$\int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx = \left.\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

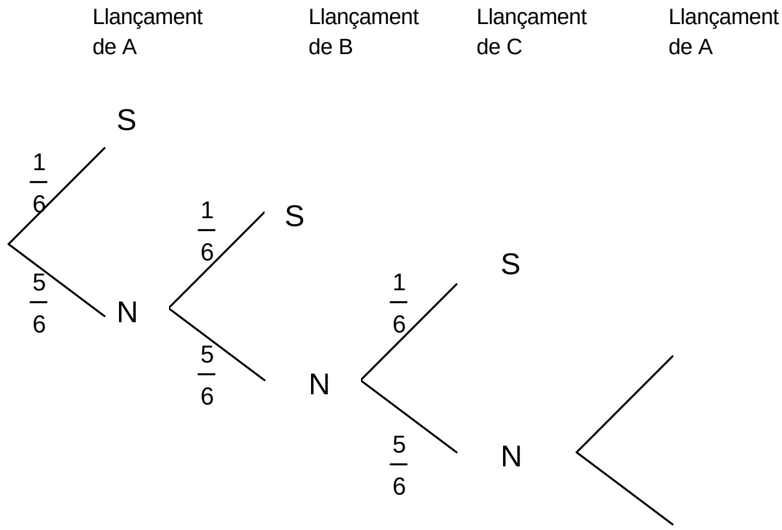
La probabilitat del succés és:

$$p = \frac{\frac{1}{3}}{1^2} = \frac{1}{3}.$$

43.- Tres persones A, B, C tiren successivament i en aquest ordre un dau. La primera persona que obté un 6 guanya la partida. Quines són respectives probabilitats de guanyar.
Oposicions Catalunya 2000.

Solució:
Siga S = traure 6. N = no traure 6.
Siga $T_A =$ guanya A. Siga $T_B =$ guanya B. Siga $T_C =$ guanya C.

Considerem el diagrama:



El procediment es repeteix fins l'infinit:

$$P(T_A)=\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^3\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^{2\cdot3}\frac{1}{6}+........=\frac{1}{6}\left(1+\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^{2\cdot3}+\left(\frac{5}{6}\right)^{3\cdot3}+...+\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}+...\right)$$

Aplicant la fórmula de la suma infinita d'una sèrie geomètrica de raó $\left(\frac{5}{6}\right)^3$,

$0<\left(\frac{5}{6}\right)^3<1$ i primer terme 1:

$$P(T_A)=\frac{1}{6}\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3}=\frac{1}{6}\frac{6^3}{6^3-5^3}=\frac{36}{91}.$$

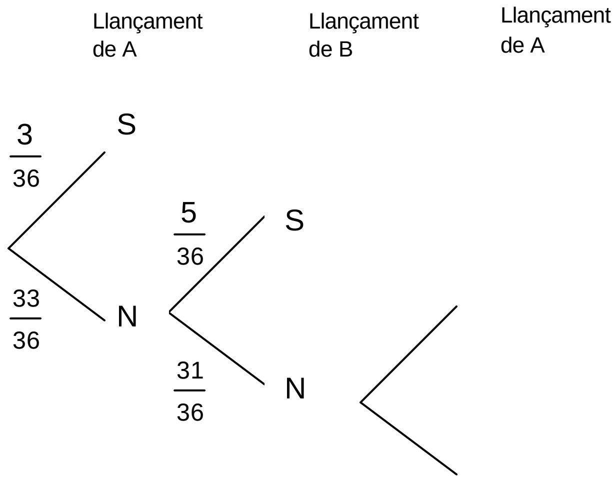
$$P(T_B)=\frac{5}{6}\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^3\frac{5}{6}\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^{2\cdot3}\frac{5}{6}\frac{1}{6}+........=\frac{5}{36}\left(1+\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^{2\cdot3}+\left(\frac{5}{6}\right)^{3\cdot3}+...+\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}+...\right)=$$

$$=\frac{5}{36}\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3}=\frac{5}{36}\frac{6^3}{6^3-5^3}=\frac{30}{91}.$$

$$P(T_C)=1-P(T_A\cup T_B)=1-(P(T_A)+P(T_B))=1-\left(\frac{36}{91}+\frac{30}{91}\right)=\frac{25}{91}.$$

44.-Dos amics A i B competeixen en el mateix joc. A tira dos daus i guanya si la suma de punts és 4, en cas contrari B tira els daus i guanya si obté com a suma de punts 6. Si B no guanya A torna a tirar amb les mateixes condicions i així successivament fins que un dels dos guanye. Calculeu:
a) la probabilitat que té A de guanyar.
b) La probabilitat que té B de guanyar.
Oposicions de Catalunya 2000.

Solució:
Els casos favorables de traure suma 4 al llançar 2 daus són 3
Els casos favorables de traure suma 6 al llançar 2 daus són 5
Els casos possibles són 36.
Siga T_A = guanya A. Siga T_B = guanya B.
Considerem el diagrama:



El procediment es repeteix fins l'infinit:

$$P(T_A)=\frac{1}{12}+\left(\frac{11}{12}\frac{31}{36}\right)\frac{1}{12}+\left(\frac{11}{12}\frac{31}{36}\right)^2\frac{1}{12}+........=\frac{1}{12}\left(1+\left(\frac{11}{12}\frac{31}{36}\right)+\left(\frac{11}{12}\frac{31}{36}\right)^2+...+\left(\frac{11}{12}\frac{31}{36}\right)^n+...\right)$$

Aplicant la fórmula de la suma infinita d'una sèrie geomètrica de raó, $\frac{11}{12}\frac{31}{36}$,
$0<\frac{11}{12}\frac{31}{36}<1$ i primer terme 1:

$$P(T_A)=\frac{1}{12}\frac{1}{1-\frac{11}{12}\frac{31}{36}}=\frac{36}{91}.$$

$$P(T_B)=1-P(T_A)=1-\frac{36}{91}=\frac{55}{91}.$$

45.- A i B realitzen el següent joc: llancen un dau a l'aire, guanya A la tirada si ix 1 ó 2 i guanya B en qualsevol altre cas. Acorden que guanyarà el primer que guanye dues tirades consecutives. Calculeu la probabilitat que té cadascun de guanyar.
Oposicions Catalunya 1998.

Solució:
Siga A = guanyar A la tirada, B = guanyar B la tirada.

$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. $P(B)=1-P(A)=\frac{2}{3}$.

La probabilitat que guanye A es igual a la suma de la probabilitat que guanye A en una tirada parella $n=2k+2$ i una tirada $2k+3$, $k=0,1,2,....$.

La probabilitat que guanye A en una tirada parella és:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{9}\right)^k\frac{1}{9}.$$

La probabilitat que guanye A en una tirada imparella és:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{9}\right)^k\frac{2}{27}.$$

La probabilitat que A guanye el joc és:

$$P(G_A)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^k\frac{1}{9}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^k\frac{2}{27}=\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{27}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^k=\frac{5}{27}\frac{1}{1-\frac{2}{9}}=\frac{5}{21}.$$

La probabilitat que guanye B el joc és:

$$P(G_B)=1-P(G_A)=1-\frac{5}{21}=\frac{16}{21}.$$

46.- Un examen consta de 20 preguntes, cada una amb quatre respostes perquè l'alumne en trie la correcta. Si cada pregunta correctament contestada val $\frac{1}{2}$ punts, quin valor negatiu cal atorgar a les respostes incorrectes per garantir la puntuació global 0 a aquell alumne que no sap absolutament res de la matèria d'examen i respon a l'atzar.
Oposicions Catalunya 1999.

Solució:
La distribució del problema és una variable binomial $n = 20$, $p = \frac{1}{4}$.

$$B\left(20, \frac{1}{4}\right)$$

L'esperança de l'experiment és:

$$E(X) = \mu = n \cdot p = 20 \cdot \frac{1}{4} = 5.$$

La mitjana de respostes encertades és 5. La mitjana de no encertades és 15.
Siga p la puntuació de cada pregunta mal encertada.
La nota volem que siga 0:

$$5 \cdot \frac{1}{2} + 15 \cdot p = 0.$$

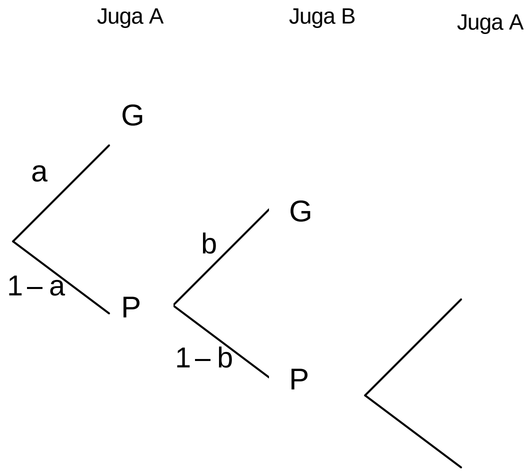
Resolent l'equació:

$$p = \frac{-1}{6}.$$

47.- Dos jugadors A i B, juguen alternativament amb probabilitats respectives de guanyar en cada jugada a i b. El joc s'interromp quan un dels dos jugadors aconsegueix la seua primera victòria . Suposant que A és el primer a jugar, establiu una relació entre a i b perquè el joc siga equitatiu,
Oposicions Catalunya 1999.

Solució:
Siga $G_A =$ guanya el joc A. Siga $G_B =$ guanya el joc B.

Considerem el diagrama:



El procediment es repeteix fins l'infinit:

Volem que el joc siga equitatiu.

$P(G_A) = \frac{1}{2}$.

$$P(G_A) = a + (1-a)(1-b)a + \left((1-a)(1-b)\right)^2 a + \ldots + \left((1-a)(1-b)\right)^k a + \ldots = $$

$$= a\sum_{k=0}^{\infty}\left((1-a)(1-b)\right)^k = a\frac{1}{1-(1-a)(1-b)}$$

$$\frac{1}{2} = a\frac{1}{1-(1-a)(1-b)}$$

$$a = b(a-1)$$

$$b = \frac{a}{a-1}.$$

48.- Siga la funció $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } 0<x \\ \dfrac{k}{e^{x}+e^{-x}} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

a) Calculeu el valor k a fi que $f(x)$ siga una funció de densitat.
b) Calculeu la funció de distribució.
c) Sabent que el valor de la variable és menor que 3. Calculeu la probabilitat que siga major que 1.
Oposicions de València 2003.

Solució:
Solució:
a)

És una funció de densitat si $\int_0^{+\infty} f(x)dx=1$.

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{k}{e^{x}+e^{-x}}=k\frac{\pi}{4}.$$

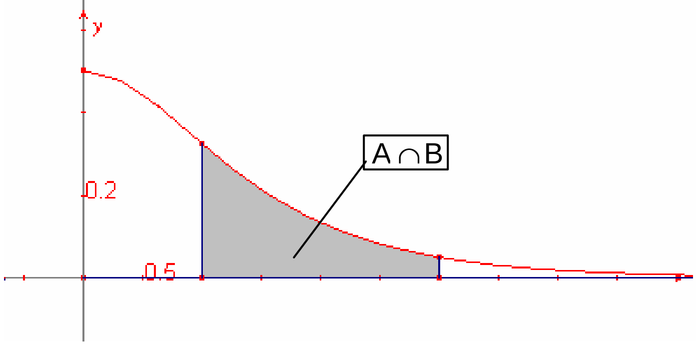
$$\int\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}=\int\frac{1}{t+\frac{1}{t}}\frac{1}{t}dt=\int\frac{1}{1+t^{2}}dt=\operatorname{arctg} t+C=\operatorname{arctg}(e^{x})+C.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t=e^{x} \\ dx=\dfrac{1}{t}dt \end{array}}.$$

Aleshores, $k=\dfrac{4}{\pi}$.

b)
La funció de distribució és:

$F(x)=\int_0^{x} f(t)dt=\dfrac{4}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(e^{x}\right)-\dfrac{\pi}{4}\right)$ si $x\geq 0$. $F(x)=0$ si $x<0$.



c)
Siga A = La variable x menor que 3.
Siga B = la variable x major que 1.

Es demana la probabilitat $P(B\,|\,A)$.

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

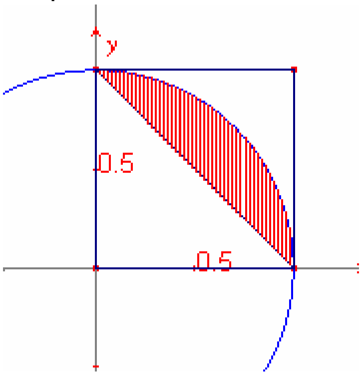
$$P(A\cap B)=F(3)-F(1)=\frac{4}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(e^{3}\right)-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{4}{\pi}\left(\operatorname{arctg}(e)-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left(e^{3}\right)-\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(e).$$

$$P(A)=F(3)=\frac{4}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(e^{3}\right)-\frac{\pi}{4}\right).$$

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\operatorname{arctg}\left(e^{3}\right)-\operatorname{arctg}(e)}{\operatorname{arctg}\left(e^{3}\right)-\frac{\pi}{4}}\approx 0'4115633.$$

49.- Calculeu la probabilitat que dos nombres positius, ambdós menors que 1, triats a l'atzar, constitueixen amb el nombre 1, una terna de nombres (x, y, 1) que puguen ser costats d'un triangle obtusangle.
Oposicions Catalunya

Solució:
L'experiment és equivalent a escollir un punt aleatori M(x,y) en el quadrat de costat 1.
Per a que formen un triangle, essent 1 el costat més gran:
$x+y<1$



Per a que formen un triangle obtusangle, essent 1 el costat més gran:
$1^2>x^2+y^2$.
Aleshores les solucions x, y han de satisfer:
$\begin{cases} x+y<1 \\ 1>x^2+y^2 \end{cases}$.
Els casos possibles són l'àrea del quadrat de costat 1
Els casos favorables és l'àrea de la regió dins del quadrat afitada per la recta $y=-x+1$ i la circumferència $x^2+y^2=1$.
És a dir, l'àrea d'un quart de cercle de radi 1 menys l'àrea d'un triangle rectangle de catets 1, 1.
$S=\frac{1}{4}\pi\cdot 1^2-\frac{1\cdot 1}{2}=\frac{\pi-2}{4}$.

La probabilitat del succés és:
$p=\frac{\frac{\pi-2}{4}}{1^2}=\frac{\pi-2}{4}$.

50.- Siguen $a,b\in N$, siga X una variable aleatòria discreta amb valors naturals:

$P(X=x)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ $\quad$ si $1\le x\le ab$

$P(X=x)=0$ $\quad$ si $x>ab$.

a) Determineu la condició que han de satisfer a i b per a que siga una funció de densitat de probabilitat.

b) Calculeu la funció de distribució $F(x)$. Calculeu la solució de $F(x)=\frac{1}{2}$.

c) Calculeu l'esperança de X, $E(X)$. Per a quins valors de a i b $E(X)=\frac{7}{2}$.

Solució:

a)

Per a ser una funció de densitat de probabilitat $\sum_{\substack{x=1\\x\in N}}^{\infty}P(X=x)=1$

$$1=\sum_{x=1}^{ab}P(X=x)=\sum_{x=1}^{ab}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\sum_{x=1}^{ab}1=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)ab=b-a.$$

La condició que han de complir és: $b-a=1$.

b)

$F(x)=P(X\le x)$.

Si $1\le x\le ab$.

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{i=1}^{x}P(X=i)=\sum_{i=1}^{x}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\sum_{i=1}^{x}1=x\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

Si $x>ab$.

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{i=1}^{x}P(X=i)=\sum_{i=1}^{ab}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\sum_{i=1}^{x}1=1.$$

Resolem $F(x)=\frac{1}{2}$:

$x\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{2}$. Resolent l'equació, $x=\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}=\frac{1}{2}\frac{ab}{b-a}=\frac{ab}{2}$.

c)

Calculem l'esperança $E(X)$:

$$E(X)=\sum_{x=1}^{ab}xP(X=x)=\sum_{x=1}^{ab}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)x=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\sum_{x=1}^{ab}x$$

(Tenint en compte la suma de ab termes d'una progressió aritmètica de primer terme 1 i l'últim terme ab, $\sum_{x=1}^{ab}x=\frac{(1+ab)ab}{2}$).

$$E(X)=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\sum_{x=1}^{ab}x=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\frac{ab(1+ab)}{2}=\frac{b-a}{ab}\frac{ab(1+ab)}{2}=\frac{1+ab}{2}.$$

Determinem a, i b a fi que $E(X)=\frac{7}{2}$. $\frac{1+ab}{2}=\frac{7}{2}$.

Per tant a, b han de complir que $\begin{cases}b-a=1\\ab=6\end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}$.