51.- En una urna hi ha dues boles, una blanca i una negra. S'extreu una bola i és torna a introduir acompanyada d'una altra del mateix color. Es continua el procés fins a tenir dotze boles a l'urna. Quina és la probabilitat que siguen sis blanques i sis negres. Oposicions Catalunya 1999.

Solució:
Per tenir 12 boles en la urna haurem de fer 10 extraccions.

Siga A = hi hagen 6 blanques i 6 negres dins de l'urna.

Per a qui hi hagen 6 boles blanques i 6 negres hem d'extraure 5 boles blanques i 5 negres.

El nombre de formes d'ordenar 5 boles blanques i 5 negres és:, permutacions de 10 elements amb repetició de 5, 5:

$$P_{10}^{5,5} = \frac{10!}{5!\cdot 5!}.$$

Totes les ordenacions tenen la mateixa possibilitat de eixir que és:
BBBBBNNNNN

$$p = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{5}{11} = \frac{5!\cdot 5!}{11!}.$$

$$P(A) = P_{10}^{5,5}\cdot p = \frac{10!}{5!\cdot 5!}\cdot\frac{5!\cdot 5!}{11!} = \frac{1}{11}.$$

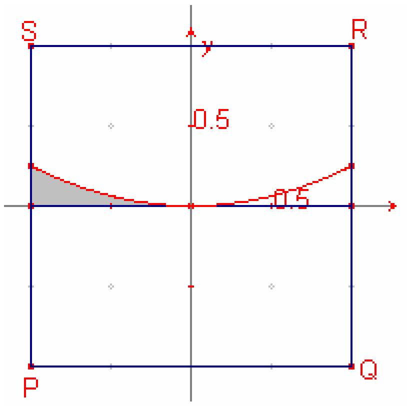
52.- Els coeficients A i B de l'equació $x^2 + Ax + B = 0$ s'escullen a l'atzar en l'interval $]-1,1[$. Calculeu la probabilitat que les arrels d'aquesta equació siguen real i positives. Oposicions Madrid 2000.

Solució:
L'experiment és equivalent a escollir un punt aleatori M(A,B) en el quadrat de vèrtexs $P(-1,-1)$, $Q(1,-2)$, $R(1,1)$, $S(-1,1)$ tal que:

$A^2 - 4B \geq 0$ (el discriminant de l'equació de segon grau siga positiu, a fi que la solució siga real).

$$\frac{-A+\sqrt{A^2-4B}}{2} > 0$$

$$\frac{-A-\sqrt{A^2-4B}}{2} > 0$$



Sumant les dues inequacions:
$A < 0$

Si $A < 0$, i a més a més $-A > \sqrt{A^2 - 4B} > 0$. Per tant, $B > 0$.

Els casos possibles són l'àrea del quadrat de vèrtexs $P(-1,-1)$, $Q(1,-2)$, $R(1,1)$, $S(-1,1)$.

Els casos favorables és l'àrea de la regió dins del quadrat afitada per la paràbola $B = \frac{1}{4}A^2$, l'eix d'abscisses i les rectes $A = -1$, $A = 0$.

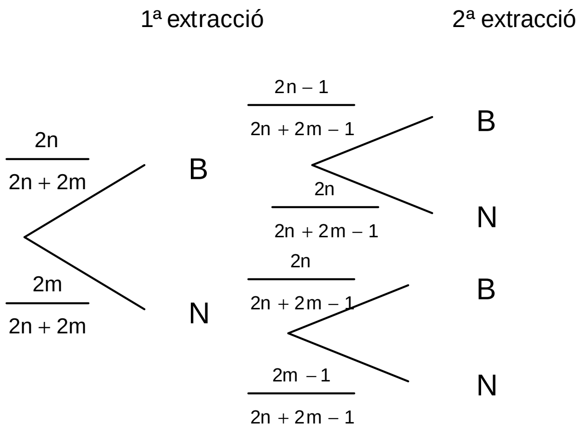
$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{4} A^2 dA = \frac{1}{12} A^3 \Big]_{-1}^{0} = \frac{1}{12}.$$

Aleshores la probabilitat és:

$$p = \frac{\frac{1}{12}}{2^2} = \frac{1}{48}.$$

53.- Antoni té un calaix d'armari ple de mitjons negres i de mitjons blancs idèntics.
Si s'escullen 2 mitjons a l'atzar, la probabilitat que siguen del mateix color és $\frac{1}{2}$.
Quants mitjons hi ha de cada color en el calaix?

Solució:
Siga m = parelles de mitjons negres. Hi ha 2m mitjons negres al calaix.
Siga n = parelles de mitjons blancs. Hi ha 2n mitjons blancs al calaix.
L'experiment consisteix en escollir a l'atzar 2 mitjons del calaix sense reposició.
El diagrama d'arbre del problema és:



Siga X el succés treure els mitjons del mateix color.
El succés X està format pels successos BB o NN
$P(X)=\frac{2n}{2m+2n}\cdot\frac{2n-1}{2m+2n-1}+\frac{2m}{2m+2n}\cdot\frac{2m-1}{2m+2n-1}$. Per hipòtesi, $P(X)=\frac{1}{2}$.
Aleshores:
$$\frac{2n(2n-1)}{(2m+2n)(2m+2n-1)}+\frac{2m(2m-1)}{(2m+2n)(2m+2n-1)}=\frac{1}{2}$$
Simplificant:
$$2n^2+2m^2-n-m-4nm=0$$
Resolem l'equació amb nombres naturals.
$$2n^2+(-1-4m)n+2m^2-m=0.$$
$$n=\frac{1+4m\pm\sqrt{16m+1}}{4}.$$
Per a ser n natural $16m+1=k^2$.
$16m=(k+1)(k-1)$.
Dues solucions particulars són, $m=14$, o bé $m=18$.

Si $m=14$, $n=\frac{1+56\pm15}{4}=\begin{cases}18\\ \frac{21}{2}\end{cases}$ la segona solució no és vàlida ja que no és natural.

Si $m=18$, $n=\frac{1+72\pm17}{4}=\begin{cases}14\\ \frac{45}{2}\end{cases}$ la segona solució no és vàlida ja que no és natural.

Les solucions particulars són:
1ª Hi ha 14 parells de mitjons negres i 18 parells de mitjons blancs.
2ª Hi ha 14 parells de mitjons blancs i 18 parells de mitjons negres.

Vegem que hi ha més solucions.

$2n^2+(-1-4m)n+2m^2-m=0$. $n=\dfrac{1+4m\pm\sqrt{16m+1}}{4}$.

Per a ser n natural $16m+1=k^2$.
$16m=(k+1)(k-1)$.
Aleshores, $k+1$ o $k-1$ són múltiples de 8.

Si $k-1=8r$, $k+1=8r+2$.
Aleshores, $m=r(4r+1)$.

$$n=\frac{1+4r(4r+1)\pm\sqrt{16r(4r+1)+1}}{4}=\frac{1+4r(4r+1)\pm(16r+1)}{4}=\begin{cases}\dfrac{4r(4r+1)+16r+2}{4}\notin N\\ r(4r-1)\end{cases}$$

Aleshores la solució és $\begin{cases}m=r(4r+1)\\ n=r(4r-1)\end{cases}$, $r\in N$.

Si $k+1=8r$, $k-1=8r-2$.
Aleshores, $m=r(4r-1)$

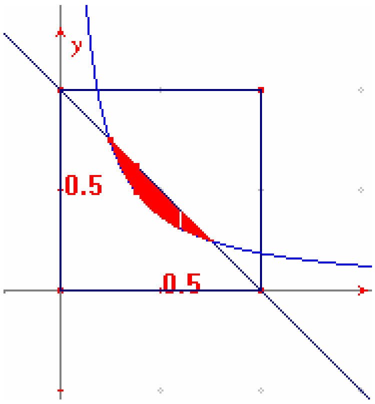
$$n=\frac{1+4r(4r-1)\pm\sqrt{16r(4r-1)+1}}{4}=\frac{1+4r(4r-1)\pm(16r-1)}{4}=\begin{cases}r(4r+1)\\ \dfrac{4r(4r-1)-16r+2}{4}\notin N\end{cases}$$

Aleshores la solució és $\begin{cases}m=r(4r-1)\\ n=r(4r+1)\end{cases}$, $r\in N$.

54.- S'escullen dos punts x, y, en l'interval $[0,1]$. Determineu la probabilitat que és verifique simultàniament que la seua suma siga menor que 1 i que el seu producte siga major que $\frac{3}{16}$.
Oposicions Extemadura 2006.

Solució:
L'experiment és equivalent a escollir un punt aleatori M(x,y) en el quadrat de costat 1 tal que verifiquen

$$\begin{cases} x+y<1 \\ xy>\frac{3}{16} \end{cases}.$$



Els casos possibles són l'àrea del quadrat de costat 1
Els casos favorables és l'àrea de la regió dins del quadrat afitada per la recta $x+y=1$ i la hipèrbola $xy=\frac{3}{16}$.
Calculem l'àrea.

La intersecció de la recta i la hipèrbola ve donada per la solució del sistema:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{3}{16} \end{cases}, \quad \begin{array}{l} \left\{ x=\frac{1}{4},\ y=\frac{3}{4} \right. \\ \left\{ x=\frac{3}{4},\ y=\frac{1}{4} \right. \end{array}.$$

L'àrea factible és:

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \left(1-x-\frac{3}{16x}\right)dx=\frac{1}{4}+\frac{3}{16}\ln\frac{1}{3}.$$

La probabilitat p de l'experiment és:

$$p=\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{16}\ln\frac{1}{3}}{1^2}=\frac{1}{4}+\frac{3}{16}\ln\frac{1}{3}.$$

55.- Es fa un estudi dels alumnes de Batxillerat d'un institut, que pertanyen a 3 barris A, B i C. El 20% dels alumnes de l'institut pertanyen al barri A, el 30% al B i la resta a C. El 80% dels alumnes del barri A estudien 1r de Batxillerat i la resta 2n, el 50% dels del barri B estudien 1r de Batxillerat i la resta 2n i el 60% dels alumnes del barri C estudien 1r i la resta 2n.
a) S'escull un alumne a l'atzar. Quina és la probabilitat que estudie 2n?.
b) Si s'escull un alumne i es sap que estudia 1r. Quina és la probabilitat que siga del barri B.
Oposicions Andalusia 2006.

Solució:
Siguen els successos:
$T = \{\text{estudiar 2n de batxillerat}\}$
$R = \{\text{estudiar 1r de batxillerat}\}$.
$S_1 = \{\text{ser del barri A}\}$
$S_2 = \{\text{ser del barri B}\}$
$S_3 = \{\text{ser del barri C}\}$
$\bigcup_{i=1}^{3} S_i = O, \quad S_i \cap S_j = \varnothing \text{ si } i \neq j.$

a)
Aplicant el teorema de la probabilitat total:

$$P(T) = \sum_{i=1}^{3} P(T \mid S_i)P(S_i)$$

$$P(T \mid S_1) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}, \quad P(T \mid S_2) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}, \quad P(T \mid S_3) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$

$$P(S_1) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}, \quad P(S_2) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}, \quad P(S_3) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}.$$

$$P(T) = \sum_{i=1}^{3} P(T \mid S_i)P(S_i) = \frac{1}{5}\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{10} + \frac{2}{5}\frac{1}{2} = \frac{39}{100}.$$

b)
Aplicant el teorema de Bayes:

$$P(S_2 \mid R) = \frac{P(R \mid S_2)P(S_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(R \mid S_i)P(S_i)}$$

$$P(R \mid S_1) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}, \quad P(R \mid S_2) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}, \quad P(R \mid S_3) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}.$$

$$P(S_2 \mid R) = \frac{P(R \mid S_2)P(S_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(R \mid S_i)P(S_i)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{10}}{\frac{4}{5}\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{10} + \frac{3}{5}\frac{1}{2}} = \frac{15}{61}.$$

56.- Un calaix conté mitjons solts blanc i negres. Si s'extrau dos mitjons a l'atzar, la probabilitat que ambdós siguen blancs és $\frac{1}{2}$. Calculeu:

a) El nombre mínim de mitjons que conté el calaix.
b) El nombre mínim de mitjons que conté la caixa si el nombre de mitjons negres és parell.
Oposicions Castella la Manxa 2006.

Solució:
Siga n el nombre de mitjons blancs.
Siga m el nombre de mitjons negres.
Siga S el succés treure dos mitjons blancs.
a)

$$P(S)=\frac{1}{2}.$$

$$P(S)=\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+m}{2}}=\frac{\frac{n!}{2!(n-2)!}}{\frac{(n+m)!}{2!(n+m-2)!}}=\frac{n(n-1)}{(n+m)(n+m-1)}.$$

$$\frac{n(n-1)}{(n+m)(n+m-1)}=\frac{1}{2}.$$

$$n^2-(2m+1)n+m-m^2=0.$$

Resolent l'equació en la incògnita n:

$$n=\frac{2m+1\pm\sqrt{8m^2+1}}{2}$$

Si $m=1$, $n=3$
Aleshores, $n+m=4$ el nombre mínim de mitjons és 4, 1 de negre i 3 de blancs.

b)
Suposem $m=2k$.
Anàlogament:

$$n=\frac{4k+1\pm\sqrt{32k^2+1}}{2}$$

Per a ser n natural $32k^2+1$ ha de ser un quadrat perfecte imparell.
Per tant, $32k^2+1=(2s+1)^2$

$$8k^2=s(s+1)$$

Aleshores, $k^2=9$ o $k^2=7$ (aquesta darrera equació no té solució entera)
Per tant, $k=3$.

$$m=2\cdot 3=6.$$

$$n=\frac{13+\sqrt{289}}{2}=15.$$

Aleshores, $n+m=4$ el nombre mínim de mitjons és 21, 6 de negre i 15 de blancs.

57.- Determineu la probabilitat que l'equació de segon grau $x^2 + 2bx + c = 0$ amb $b, c \in [-\lambda, \lambda]$, $\lambda \in R$ tinga solucions complexes.
Calcula la probabilitat si $b, c \in R$.
Oposicions Cantàbria 2006.

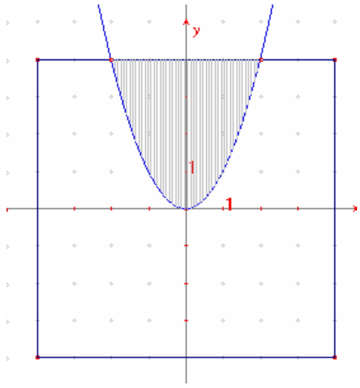
Solución:
La ecuación tiene solución compleja si el discriminante es negativo: $4b^2 - 4c < 0$.

El experimento es equivalente a escoger un punto aleatorio M(c, b) en el cuadrado ABCD de lado 2λ, $A(\lambda,\lambda)$, $B(-\lambda,\lambda)$, $C(-\lambda,-\lambda)$, $D(\lambda,-\lambda)$ tal que verifiquen
$b^2 - c < 0$
Calculemos la intersección de la parábola $c = b^2$. I la recta $c = \lambda$

$\begin{cases} c = b^2 \\ c = \lambda \end{cases}$, Las soluciones son $\begin{cases} x = -\sqrt{\lambda} \\ y = \lambda \end{cases}$, $\begin{cases} x = \sqrt{\lambda} \\ y = \lambda \end{cases}$

Los casos posibles son el área del cuadrado de lado 2λ.

Supongamos $\lambda \geq 1$.
Los casos favorables corresponden al área de la mitad del rectángulo de lado λ, $2\sqrt{\lambda}$, menos el área de la parábola entre $\left[-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}\right]$.



El área de la parábola entre $\left[-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}\right]$ es:

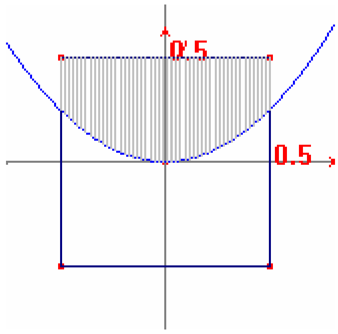
$$2\int_0^{\sqrt{\lambda}} b^2 db = 2\left(\frac{b^3}{3}\right)\Bigg]_0^{\sqrt{\lambda}} = \frac{2}{3}\lambda\sqrt{\lambda}.$$

El área de medio cuadrado de lado 2λ es: $2\lambda^2$.
El área del rectángulo de lado, λ, $2\sqrt{\lambda}$ es λ, $2\sqrt{\lambda}$ és $2\lambda\sqrt{\lambda}$ Los casos favorables son:

$$2\lambda\sqrt{\lambda} - \frac{2}{3}\lambda\sqrt{\lambda}.$$

Entonces la probabilidad es: $p = \dfrac{\frac{4}{3}\lambda\sqrt{\lambda}}{4\lambda^2} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\lambda}$.

Supongamos $\lambda < 1$.
Los casos favorables corresponden al área de la mitad del cuadrado de lado 2λ, menos el área de la parábola entre $[-\lambda, \lambda]$



El área de medio cuadrado de lado 2λ es: $2\lambda^2$.

El área de la parábola entre $[-\lambda, \lambda]$ es: $2\int_0^{\lambda} b^2 db = 2\left(\frac{b^3}{3}\right)\Bigg]_0^{\lambda} = \frac{2}{3}\lambda^3$.

Los casos favorables son: $2\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^3$.

Entonces la probabilidad es: $p = \dfrac{2\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^3}{4\lambda^2} = \dfrac{3-\lambda}{6}$.

Si $b, c \in R$ la probabilidad es: $p = \lim\limits_{\lambda \to \infty} \dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\lambda} = 0$.

58.- La longitud del radi d'una esfera és una variable aleatòria amb funció de densitat $f(x)=kx(1-x)$ si $0\le x\le 1$ i nul·la en qualsevol altre cas.

a) Calculeu el valor de la constant k a fi que siga efectivament una funció de densitat. Determineu la funció de distribució.

b) Se sap que el radi de l'esfera mesura més de $\frac{1}{3}$. Calculeu la probabilitat que la longitud del radi siga inferior a $\frac{3}{4}$.

c) Si $S=4\pi x^2$ és la superfície de l'esfera de radi x, calculeu $P(S>s)$

Oposicions La Rioja 2006.

Solució:

a)

És una funció de densitat si $\int_0^1 f(x)dx=1$.

$$1=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 kx(1-x)dx=k\left(\frac{-x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big]_0^1=k\frac{1}{6}.$$

Aleshores, $k=6$. La funció de distribució és:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\le 0\\ -2x^3+3x^2 & \text{si } 0<x\le 1.\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}$$

b)

Siga el succés A = radi major que $\frac{1}{3}$ i el succés B = radi menor que $\frac{3}{4}$.

Busquem la probabilitat $P(B\,|\,A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

$$P(A\cap B)=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{3}{4}}6x(1-x)dx=\left(-2x^3+3x^2\right)\Big]_{\frac{1}{3}}^{\frac{3}{4}}=\frac{505}{864}.$$

$$P(A)=\int_{\frac{1}{3}}^{1}6x(1-x)dx=\left(-2x^3+3x^2\right)\Big]_{\frac{1}{3}}^{1}=\frac{20}{27}.$$

Aleshores:

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{505}{864}}{\frac{20}{27}}=\frac{101}{128}.$$

c)

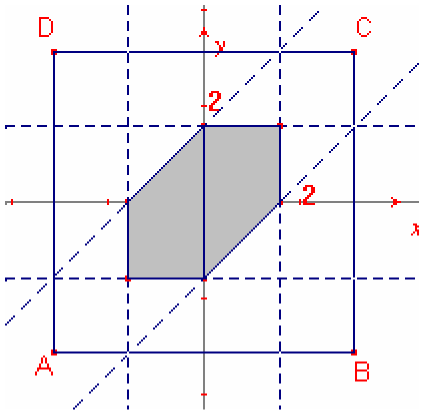
$S=4\pi x^2$, $x=\sqrt{\frac{S}{4\pi}}$, $0\le x\le 1$, aleshores, $0\le S\le 4\pi$.

$$P(S>s)=P\left(X>\sqrt{\frac{s}{4\pi}}\right)=F(1)-F\left(\sqrt{\frac{s}{4\pi}}\right)=1-\left(-2\left(\sqrt{\frac{s}{4\pi}}\right)^3+3\left(\sqrt{\frac{s}{4\pi}}\right)^2\right)\text{ si } 0\le s\le 4\pi.$$

$P(S>s)=0$ si $s>4\pi$.

59.- En una circumferència s'escullen al l'atzar 3 punts. Calculeu la probabilitat que els tres punts estiguen situats en el mateix arc de 90º.
Oposicions Andalusia 2000.

Solució:
Determinem el punt P en l'origen de la circumferència de centre O la qual suposarem de radi 1.
Siga $x = \angle POQ$, $y = \angle POR$
L'experiment és equivalent a escollir un punt aleatori M(x,y) en el quadrat de vèrtexs $A(-\pi,-\pi), B(\pi,-\pi), C(\pi,\pi), D(-\pi,\pi)$ tal que acomplesca les següents condicions:



El punt Q el situarem de tal forma que l'angle $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

Si $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ l'angle y és tal que $x - \frac{\pi}{2} < y \le \frac{\pi}{2}$
La regió que satisfà les 4 inequacions és el quadrilàter (trapezi) limitat per les rectes:
$x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2}$, $y = x - \frac{\pi}{2}$

La seua àrea és $S_1 = \frac{\pi + \frac{\pi}{2}}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi^2$.

Si $-\frac{\pi}{2} \le x \le 0$ l'angle y és tal que $-\frac{\pi}{2} < y \le x + \frac{\pi}{2}$
La regió que satisfà les 4 inequacions és el quadrilàter (trapezi) limitat per les rectes:
$x = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $y = -\frac{\pi}{2}$, $y = x + \frac{\pi}{2}$.

La seua àrea és $S_2 = \frac{\pi + \frac{\pi}{2}}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi^2$.

Els casos favorables, els correspon la suma de les àrees $S_1 + S_2$.
Els casos possibles és l'àrea del quadrat ABCD de costat 2π.

La probabilitat que busquem és:

$$p = \frac{S_1 + S_2}{(2\pi)^2} = \frac{\frac{3}{4}\pi^2}{4\pi^2} = \frac{3}{16}.$$

60.- S'ha escollit 10 jugadors, 4 dels quals són del Barça. En llançar el penal la probabilitat de fallar-lo és de 0'3 excepte els del Barça que els fallen tots. Un jugador tira el penal i falla. Calculeu la probabilitat que siga del Barça.

Solució:
Siga els successos:
$A_1 = \{\text{ser del Barça}\}$, $A_2 = \{\text{no ser del Barça}\}$
$T = \{\text{fallar el penal}\}$.
La probabilitat que cerquem és: $P(A_1 | T)$.

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cup A_2 = \Omega$.
$P(A_1) = \frac{4}{10}$, $P(A_2) = \frac{6}{10}$.
$P(T | A_1) = 1$, $P(T | A_2) = \frac{3}{10}$.

Aplicant el teorema de Bayes:

$$P(A_1 | T) = \frac{P(A_1) \cdot P(T | A_1)}{P(A_1) \cdot P(T | A_1) + P(A_2) \cdot P(T | A_2)} = \frac{\frac{4}{10} \cdot 1}{\frac{4}{10} \cdot 1 + \frac{6}{10}\frac{3}{10}} = \frac{20}{29}$$