1.- Classifiqueu les següents còniques i determineu l'equació reduïda.

a) $x^2+2xy+2y^2-x+2y=0$.

b) $x^2+4xy+y^2+4x+6y+1=0$.

c) $x^2+2xy+y^2+x-2y+1=0$.

Solució:

a) Ordenem l'equació de la cònica:

$x^2+2y^2+2xy-x+2y=0$, $a_{11}=1$, $a_{22}=2$, $a_{12}=1$, $a_{13}=\frac{-1}{2}$, $a_{23}=1$, $a_{33}=0$.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & \frac{-1}{2}\\ 1 & 2 & 1\\ \frac{-1}{2} & 1 & 0\end{vmatrix}=\frac{-5}{2}\neq 0.$$

$$|A_{33}|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1>0.$$

$$(a_{11}+a_{22})|A|=(1+2)\left(\frac{-5}{2}\right)=\frac{-15}{2}<0.$$

Aleshores, és una el·lipse real:

La seua equació reduïda serà de la forma $\lambda_1\cdot x^2+\lambda_2 y^2+c_3=0$,

On λ_1,λ_2 són els zeros de l'equació: $z^2-(a_{11}+a_{22})z+|A_{33}|=0$ i $c_3=\frac{|A|}{|A_{33}|}$.

$z^2-3z+1=0$ els zeros són: $\lambda_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

$$c_3=\frac{|A|}{|A_{33}|}=\frac{-5}{2}.$$

Aleshores l'equació reduïda de l'el·lipse és:

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2}x^2+\frac{3-\sqrt{5}}{2}y^2-\frac{5}{2}=0.$$

b)

$x^2+4xy+y^2+4x+6y+1=0$.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=8\neq 0.\quad |A_{33}|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3<0.$$

Aleshores, és una hipèrbola real:

La seua equació reduïda serà de la forma $\lambda_1\cdot x^2+\lambda_2 y^2+c_3=0$,

On λ_1,λ_2 són els zeros de l'equació: $z^2-(a_{11}+a_{22})z+|A_{33}|$ i $c_3=\frac{|A|}{|A_{33}|}$.

$z^2-2z-3=0$ els zeros són: $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-1$; $c_3=\frac{|A|}{|A_{33}|}=\frac{-8}{3}$

$$3x^2-y^2-\frac{8}{3}=0.$$

c)

$x^2+2xy+y^2+x-2y+1=0$.

$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & \frac{1}{2}\\ 1 & 1 & -1\\ \frac{1}{2} & -1 & 1\end{vmatrix}=\frac{-9}{4}\neq 0$. $|A_{33}|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0$.

Aleshores, és una paràbola real:

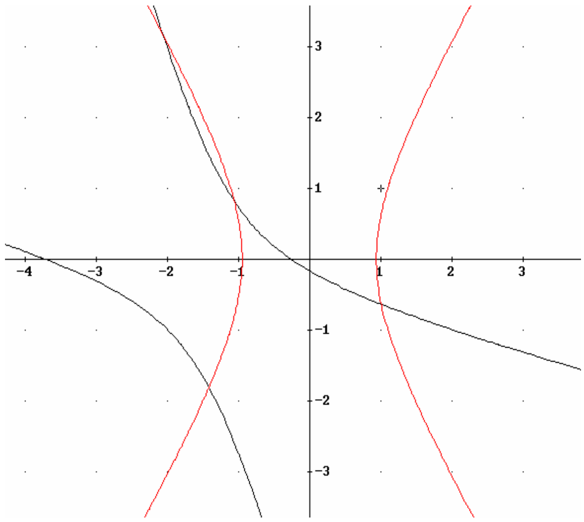
La seua equació reduïda serà de la forma $\lambda_1\cdot x^2+2c_1y=0$,

On $\lambda_1\neq 0$ és zero de l'equació: $z^2-(a_{11}+a_{22})z=0$ i $c_1=\sqrt{\frac{-|A|}{a_{11}+a_{22}}}$.

$\lambda_1=a_{11}+a_{22}=2$; $c_1=\sqrt{\frac{9}{8}}$

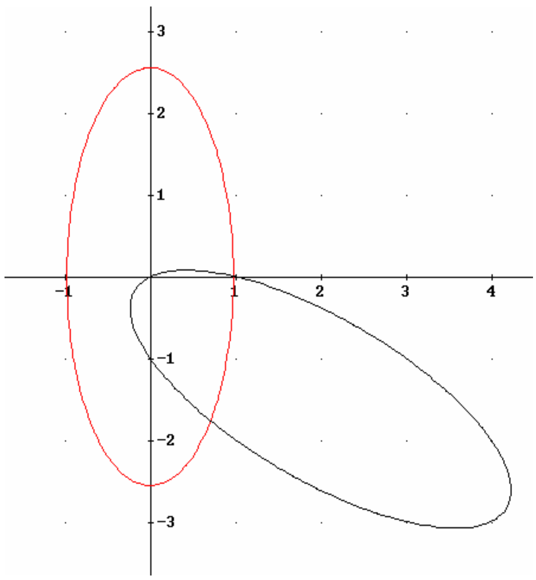
$2x^2+2\sqrt{\frac{9}{8}}y=0$.

$2x^2+\frac{3}{\sqrt{2}}y=0$.



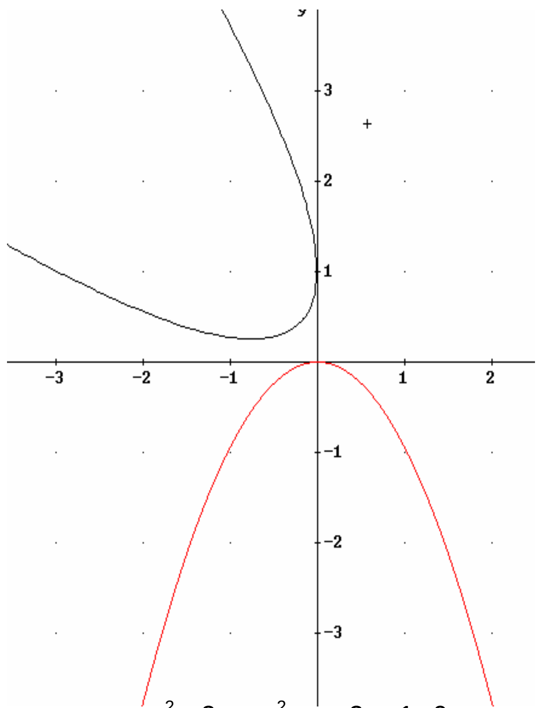
$x^2+4xy+y^2+4x+6y+1=0$

$3x^2-y^2-\frac{8}{3}=0$



$x^2+2xy+2y^2-x+2y=0$

$\frac{3+\sqrt{5}}{2}x^2+\frac{3-\sqrt{5}}{2}y^2-\frac{5}{2}=0$



$x^2+2xy+y^2+x-2y+1=0$

$2x^2+\frac{3}{\sqrt{2}}y=0$

2.- Donada l'el·lipse $2x^2-xy+y^2-x-2=0$, determineu:

a) El centre.

b) Els eixos.

c) Els focus.

d) La recta tangent a l'el·lipse en el punt $A\left(1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Solució:

a)

$a_{11}=2$, $a_{22}=1$, $a_{12}=\frac{-1}{2}$, $a_{13}=\frac{-1}{2}$, $a_{23}=0$, $a_{33}=-2$.

$$\begin{cases} f_x=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}=a_{11}\cdot x+a_{12}\cdot y+a_{13}=0 \\ f_y=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=a_{22}\cdot y+a_{12}\cdot x+a_{23}=0 \end{cases}.$$

$\begin{cases} 2x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}=0 \\ 1y-\frac{1}{2}x+0=0 \end{cases}$ la solució del sistema és $\begin{cases} x=\frac{2}{7} \\ y=\frac{1}{7} \end{cases}$.

Aleshores el centre de l'el·lipse és el punt $\left(\frac{2}{7},\frac{1}{7}\right)$.

b)

Els eixos de la cònica són:

$f_x+m_1\cdot f_y=0$ i $f_x+m_2\cdot f_y=0$ on m_1,m_2 són arrels de l'equació:

$$a_{12}\cdot m^2+(a_{11}-a_{22})m-a_{12}=0$$

$$\frac{-1}{2}m^2+(2-1)m+\frac{1}{2}=0$$

$$m^2-2m-1=0.$$

Les solucions de l'equació són: $m_1=1+\sqrt{2}$, $m_2=1-\sqrt{2}$

Els eixos són:

$E_1\equiv 2x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}+\left(1+\sqrt{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}x\right)=0$, $E_1\equiv\left(3-\sqrt{2}\right)x+\left(1+2\sqrt{2}\right)y-1=0$.

$E_2\equiv 2x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}+\left(1-\sqrt{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}x\right)=0$, $E_2\equiv\left(3+\sqrt{2}\right)x+\left(1-2\sqrt{2}\right)y-1=0$.

c)

Per calcular els focus determinarem la intersecció de $4\cdot a_{12}\cdot f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ i l'eix E_2 de la cònica que els conté:

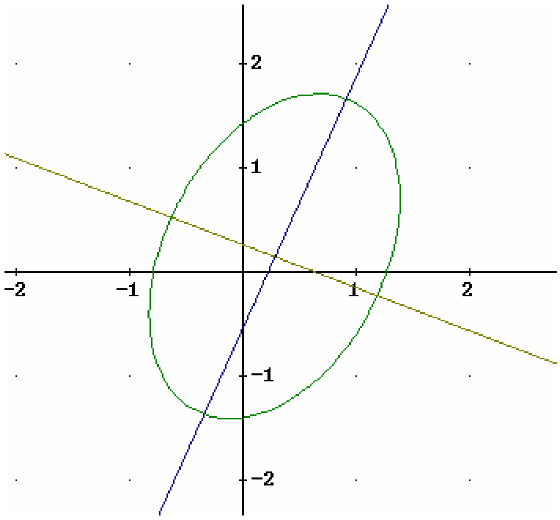
$4\left(\frac{-1}{2}\right)\left(2x^2-xy+y^2-x-2\right)=(4x-y-1)(-x+2y)$. Simplificant:

$$-7xy+x+2y+4=0$$

Els focus venen donats per la intersecció del sistema $\begin{matrix} -7xy+x+2y+4=0 \\ \left(3+\sqrt{2}\right)x+\left(1-2\sqrt{2}\right)y-1=0 \end{matrix}$

Les solucions del qual són:

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{7}+\sqrt{\dfrac{30\sqrt{2}}{49}-\dfrac{30}{49}} \\ y=\dfrac{1}{7}+\sqrt{\dfrac{30\sqrt{2}}{49}+\dfrac{30}{49}} \end{cases}, \qquad \begin{cases} x=\dfrac{2}{7}-\sqrt{\dfrac{30\sqrt{2}}{49}-\dfrac{30}{49}} \\ y=\dfrac{1}{7}-\sqrt{\dfrac{30\sqrt{2}}{49}+\dfrac{30}{49}} \end{cases}.$$



d)

Notem que $A\left(1,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ pertany a la cònica.

Calculem la recta polar del punt $A\left(1,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ respecte de la cònica.

Les coordenades homogènies de la cònica són:

$f(x,y,t)=2x^2-xy+y^2-xt-2t^2=0$

Les coordenades homogènies de A són $A\left(1,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},1\right)$

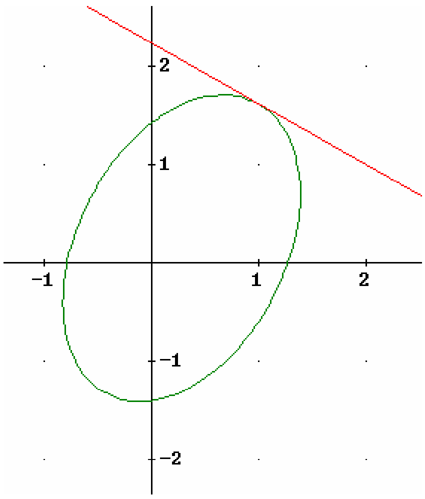
La recta polar és:

$$x(a_{11}\cdot a_1+a_{12}\cdot a_2+a_{13}\cdot t_1)+y(a_{22}\cdot a_2+a_{12}\cdot a_1+a_{23}\cdot t_1)+t(a_{13}\cdot a_1+a_{23}\cdot a_2+a_{33}\cdot t_1)=0$$

$$x\left(2\cdot 1+\frac{-1}{2}\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{-1}{2}\cdot 1\right)+y\left(1\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{-1}{2}\cdot 1+0\cdot 1\right)+1\left(\frac{-1}{2}\cdot 1+0\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}+(-2)\cdot 1\right)=0$$

Simplificant:

$$\left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)x+\frac{\sqrt{5}}{2}y-\frac{5}{2}=0$$



3.- Determineu l'equació de la cònica que passa pels punts:
$O(0,0)$, $P(1,1)$, $Q(3,1)$, $R(5,-1)$, $S(2,-2)$.
Determineu l'equació reduïda de la cònica. Calculeu la seua excentricitat.

Solució:
L'equació general de la cònica és:
$A\cdot x^2 + B\cdot y^2 + Cx\cdot y + Dx + Ey + F = 0$
Substituint les coordenades dels cinc punts de l'equació general:

$$\begin{cases} F=0 \\ A+B+C+D+E+F=0 \\ 9A+B+3C+3D+E+F=0 \\ 25A+B-5C+5D-E+F=0 \\ 4A+4B-4C+2D-2E+F=0 \end{cases} \quad \text{La solució del qual és: } \begin{cases} A=-\dfrac{3}{14}\alpha \\ B=\dfrac{-1}{2}\alpha \\ C=\dfrac{-1}{7}\alpha \\ D=\alpha \\ E=\dfrac{-1}{7}\alpha \\ F=0 \end{cases}.$$

L'equació de la cònica és:
$3x^2+7y^2+2xy-14x+2y=0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 1 & 7 & 1 \\ -7 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -360 \neq 0.$$

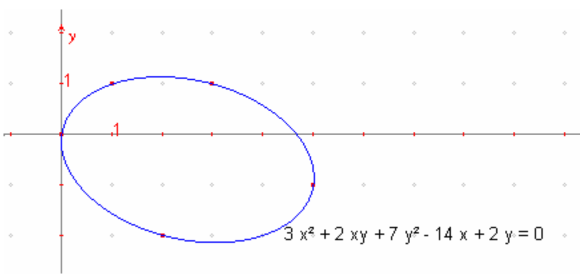
$$|A_{33}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 20 > 0.$$

$(a_{11}+a_{22})|A| = (3+7)(-359) < 0$.
Aleshores, és una el·lipse real:
La seua equació reduïda serà de la forma $\lambda_1\cdot x^2+\lambda_2 y^2+c_3=0$,

On λ_1, λ_2 són els zeros de l'equació: $z^2-(a_{11}+a_{22})z+|A_{33}|=0$ i $c_3=\dfrac{|A|}{|A_{33}|}$.

$z^2-10z+20=0$ els zeros són: $\lambda_1=5+\sqrt{5}$, $\lambda_2=5-\sqrt{5}$.

$$c_3 = \frac{|A|}{|A_{33}|} = \frac{-360}{20} = -18.$$



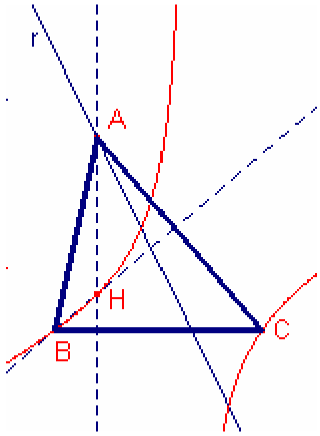
Aleshores l'equació reduïda de l'el·lipse és:
$(5+\sqrt{5})x^2+(5-\sqrt{5})y^2-18=0$.

$$\frac{x^2}{\dfrac{18}{(5+\sqrt{5})}}+\frac{y^2}{\dfrac{18}{(5-\sqrt{5})}}=1,$$

$$a^2=\frac{18}{(5+\sqrt{5})},\ b^2=\frac{18}{(5-\sqrt{5})},\quad c^2=b^2-a^2=\frac{9\sqrt{5}}{5}.$$

$$e=\frac{c}{b}=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}.$$

4.- Donat un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ determineu el lloc geomètric de l'ortocentre quan A recorre una recta no paral·lela al segment $\overline{BC}$.



Solució:
Siga la recta $r \equiv y = mx + n \quad m \neq 0$ (r no paral·lela al costat $\overline{BC}$).
Siguen el vèrtexs en les següents coordenades:
$B(0,0)$, $C(a,0)$, $A(b, bm+n)$ (notem que A esta en la recta r).
La recta altura al costat $\overline{BC}$ és: $x = b$.
La recta altura al costat $\overline{AB}$ és: $y = \dfrac{-b}{bm+n}(x-a)$.
L'ortocentre H és la intersecció d'ambdues rectes:
$H\left(b, \dfrac{-b(b-a)}{mb+n}\right)$.

Per tant el lloc geomètric de l'ortocentre dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ al variar A sobre la recta r recorre la corba:

$$y = \frac{-x^2+ax}{mx+n} = \frac{-1}{m}x + \frac{am+n}{m^2} + \frac{-\dfrac{amn+n^2}{m^2}}{mx+n}.$$

Té una asímptota horitzontal en $x = \dfrac{-n}{m}$ i una asímptota obliqua $y = \dfrac{-1}{m}x + \dfrac{am+n}{m^2}$.
Si fem un estudi de la cònica anterior veurem que és una hipèrbola:
$x^2 + mxy - ax + ny = 0$.

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{m}{2} & \frac{-a}{2} \\ \frac{m}{2} & 0 & \frac{n}{2} \\ \frac{-a}{2} & \frac{n}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \left| \begin{pmatrix} 1 & \frac{m}{2} & \frac{-a}{2} \\ \frac{m}{2} & 0 & \frac{n}{2} \\ \frac{-a}{2} & \frac{n}{2} & 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{n}{4}(-am-n) \quad |A| \neq 0 \ \text{ si } n \neq 0 \text{ i } n \neq -am$$

$$|A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{m}{2} \\ \frac{m}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{-m^2}{4} < 0$$ Aleshores la cònica és una hipèrbola.

Suposem que $n = 0$

$$|A| = 0 \qquad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{m}{2} \\ \frac{m}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{-m^2}{4} < 0.$$

Aleshores la cònica són dues rectes reals no paral·leles:
$x = 0$, $\quad y = \dfrac{-1}{m}x + \dfrac{a}{m}$.

Anàlogament, si $n=-am$.
Suposem que $n=0$
$|A|=0$

$$|A_{33}|=\begin{vmatrix}1 & \frac{m}{2}\\ \frac{m}{2} & 0\end{vmatrix}=\frac{-m^2}{4}<0$$

Aleshores la cònica són dues rectes reals no paral·leles.

Determinem l'equació reduïda de la hipèrbola.
L'equació reduïda de la hipèrbola és:
$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+c_3=0$

On λ_1,λ_2 són els valors propis, arrels de l'equació: $\lambda^2-\lambda-\frac{m^2}{4}=0$.

$$c_3=\frac{|A|}{|A_{33}|}$$

Aleshores,

$$c_3=\frac{\frac{n}{4}(-am-n)}{\frac{-m^2}{4}}=\frac{n(am+n)}{m^2}\neq 0$$

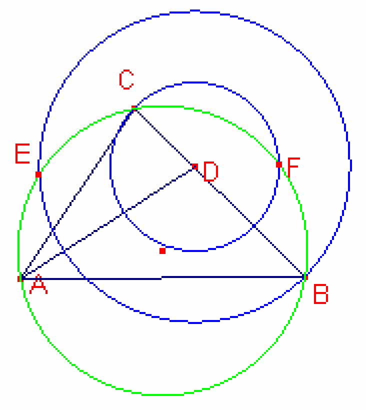
$\lambda=\frac{1\pm\sqrt{1+m^2}}{2}=\begin{cases}\frac{1+\sqrt{1+m^2}}{2}\\ \frac{1-\sqrt{1+m^2}}{2}\end{cases}$ notem que els signes dels valors propis són contraris i $c_3\neq 0$ per tant és una hipèrbola.

L'equació reduïda és:

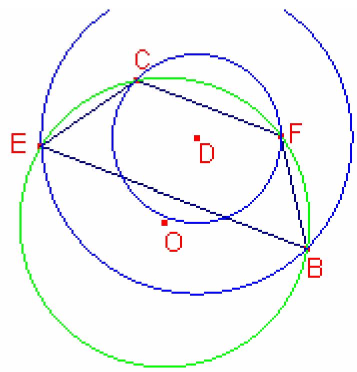
$$\frac{1+\sqrt{1+m^2}}{2}x^2+\frac{1-\sqrt{1+m^2}}{2}y^2+\frac{n(am+n)}{m^2}=0$$

Fent el mateix estudi si la recta r és paral·lela a $\overline{BC}$ el lloc geomètric de l'ortocentre és una paràbola.

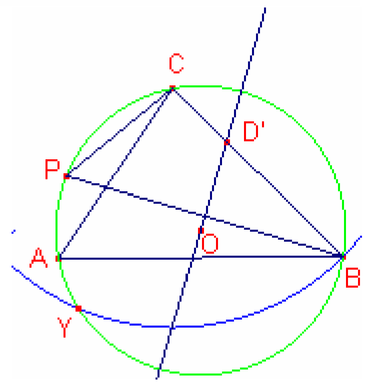
5.- Siga $\overline{AD}$ una ceviana qualsevol del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ (D pertany al costat $\overline{BC}$).
Amb centre en D, construïm dues circumferències de radi respectius $\overline{DB}$ i $\overline{DC}$ que denotarem per C1 i C2, respectivament.
Siguen E i F, els punts on les circumferències C1 i C2 intersecten amb la circumferència C3 circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Proveu que:
a) Els punts E, F i D estan alineats.
b) Determineu el lloc geomètric descrit pels punts E, F al variar D al llarg del costat $\overline{BC}$.



Solució:
a)
$\overline{DE} = \overline{DB}$, $\overline{DC} = \overline{DF}$
El quadrilàter BFCE està inscrit en la circumferència C3. Siga O el seu centre.
D és el centre de la circumferència C1. La mediatriu a la corda $\overline{CF}$ passa pels punts O D.
D és el centre de la circumferència C2. La mediatriu a $\overline{BE}$ passa pels punts O, D
La recta que passa pels punts OD és perpendicular a $\overline{CF}$ i $\overline{BE}$.



Aleshores $\overline{CF}$ i $\overline{BE}$ són paral·lels.
Per tant, els segments $\overline{CE}$ i $\overline{BF}$ són iguals.
Per tant els triangles $\overset{\Delta}{DCE}$, $\overset{\Delta}{DBF}$ són iguals.
Aleshores $\angle CDE = \angle BDF$.
Aleshores D, E, F estan alineats.
b)
Suposem $\overline{BC}$ és diàmetre de la circumferència C3 circumscrita, és a dir $A = 90^o$ de centre O el punt mig de $\overline{BC}$.
Aleshores el lloc geomètric és tota la circumferència C3. Ja que donat qualsevol punt X de la circumferència C3 les mediatrius a $\overline{BX}$ i a $\overline{CX}$ intersecten els costat $\overline{BC}$ en O i X pertany a la circumferència de centre O i radi $\overline{OB}$.



Suposem que $A < 90^o$, aleshores $\overline{BC}$ és menor que el diàmetre de la circumferència C3.
Determinem el lloc geomètric dels punts E del problema.
Considerem la circumferència de centre C que passa per B que talla la circumferència C3 en el punt Y
Vegem que l'arc de circumferència BCY és el lloc lloc geomètric del punt E al variar qualsevol punt D sobre el segment $\overline{BC}$.
Siga P sobre l'arc BCY. $\overline{PB} > \overline{BC}$. $\angle BPC = A$.
La mediatriu al segment $\overline{PB}$ talla el segment $\overline{BC}$ en D'. La circumferència de centre D' que passa per B talla la circumferència C3 en P.
Siga P' en l'arc complementari a BCY.
Tenim que $\overline{P'B} < \overline{BC}$. La mediatriu al segment $\overline{P'B}$ no talla el segment $\overline{BC}$.
Aleshores no existeix D sobre $\overline{BC}$ tal que $\overline{BD} = \overline{BP'}$.

Anàlogament ho provaríem per a $A > 90^o$.

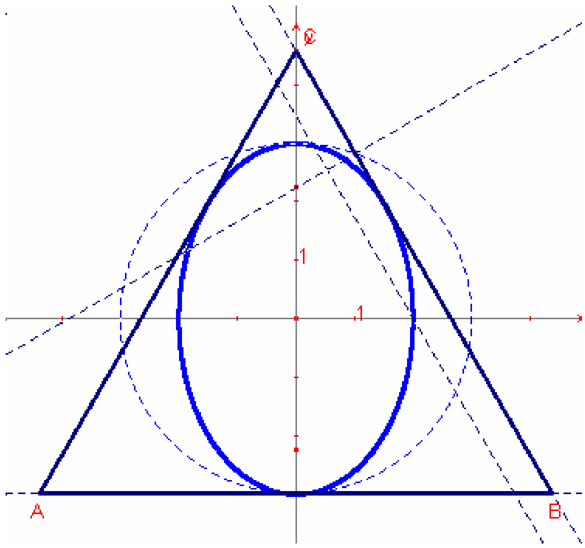
6.- Donada l'el·lipse d'equació $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, determineu el triangle equilàter circumscrit a l'el·lipse que té un costat tangent a l'el·lipse en el punt $(0,-3)$.

Solució:

Siga $C(0,a)$.

La recta r que passa per $\overline{BC}$ té pendent $tg(-60^o)=-\sqrt{3}$. La seua equació és:

$r\equiv y-a=-\sqrt{3}x$



Resolem l'equació formada per la recta r i l'el·lipse (que ha de tenir solució única, el punt de tangència).

$$\begin{cases} y-a=-\sqrt{3}x \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y-a=-\sqrt{3}x \\ \frac{x^2}{4}+\frac{3x^2-2a\sqrt{3}x+a^2}{9}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-a=-\sqrt{3}x \\ 21x^2-8a\sqrt{3}x+4a^2-36=0 \end{cases} \qquad (1)$$

A fi que el sistema tinga solució única el discriminant de l'equació de segon grau ha de ser zero.

$3\cdot 64a^2-4\cdot 21(4a^2-36)=0$.

Simplificant:

$a^2=21$. Aleshores, $a=\sqrt{21}$.

Per tant, $C(0,\sqrt{21})$.

Calculem B com intersecció de la recta r i la recta $y=-3$.

$\begin{cases} y=-3 \\ y-\sqrt{21}=-\sqrt{3}x \end{cases}$ la solució del qual és: $\begin{cases} x=\sqrt{3}+\sqrt{7} \\ y=-3 \end{cases}$.

Aleshores, $B(\sqrt{3}+\sqrt{7},-3)$ i per simetria respecte de l'eix d'ordenades $A(-\sqrt{3}-\sqrt{7},-3)$.

El punt de tangència de l'el·lipse i el costat $\overline{BC}$ del triangle és la solució del sistema (1) quan $a=\sqrt{21}$:

$$\left(\frac{4\sqrt{7}}{7},\frac{3\sqrt{21}}{7}\right).$$

L'altre punt de tangència de l'el·lipse amb el costat $\overline{AC}$ és el punt simètric de l'anterior respecte de l'eix d'ordenades:

$$\left(\frac{-4\sqrt{7}}{7},\frac{3\sqrt{21}}{7}\right).$$

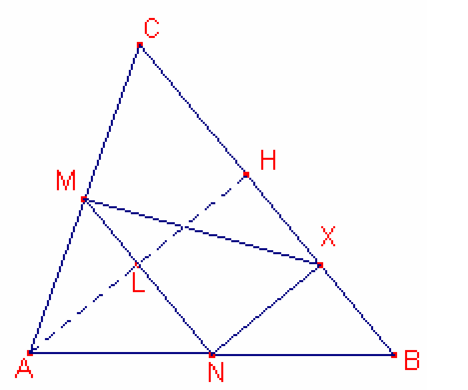
7.- Siguen M, N els punts migs de dos costats qualssevol del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga X un punt variable escollit de l'altre costat.
Es demana:

a) Demostrar que el triangle $\overset{\Delta}{XMN}$ té un àrea que no depén del punt X, i que és $\frac{1}{4}$ de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

b) Determinar el lloc geomètric descrit pels baricentres del triangles $\overset{\Delta}{XMN}$ quan X varia sobre el costat en el qual està situat.

Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Siga M el punt mig del costat $\overline{AC}$. Siga N el punt mig del costat $\overline{AB}$.



El segment $\overline{MN}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$.

a)

Siga X un punt sobre el costat $\overline{BC}$.

Siga $\overline{AH}$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

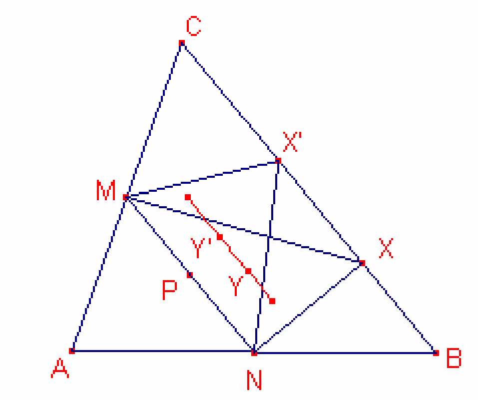
Siga $\overline{AL}$ altura del triangle $\overset{\Delta}{AMN}$

$\overline{AL} = \frac{1}{2}\overline{AH}$.

La distància entre les paral·leles $\overline{MN}$, $\overline{BC}$ és $\frac{1}{2}\overline{AH}$.

$$S_{MNX} = \frac{1}{2}\overline{MN}\cdot\overline{LH} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AH}\right) = \frac{1}{4}S_{ABC}.$$

b1)



Siga P el punt mig del segment $\overline{MN}$.

Siguen X, X' dos punts del costat $\overline{BC}$.

Siguen Y, Y' els baricentres dels triangles $\overset{\Delta}{MNX}$, $\overset{\Delta}{MNX'}$ respectivament.

Per la propietat del baricentre:

$\overline{XY} = 2\cdot\overline{YP}$

$\overline{X'Y'} = 2\cdot\overline{Y'P}$.

Aleshores els triangles $\overset{\Delta}{PXX'}$, $\overset{\Delta}{PYY'}$ són semblants i la raó de semblança és 3:1.

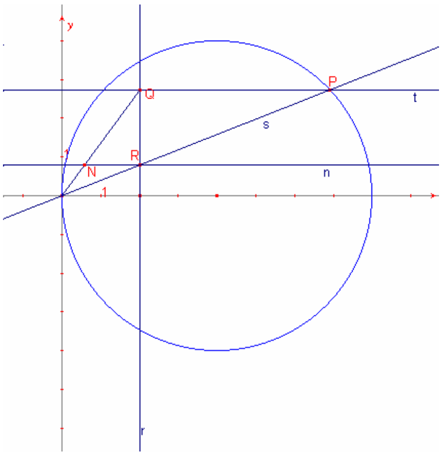
Aleshores els segments $\overline{XX'}$, $\overline{YY'}$ són paral·lels.

La distància de O al segment $\overline{YY'}$ és $\frac{1}{3}$ de la distància de P al segment $\overline{XY}$.

El lloc geomètric dels baricentres dels triangles $\overset{\Delta}{MNX}$ al variar X sobre $\overline{BC}$ és el segment paral·lel al costat $\overline{BC}$ que està entre les semirectes PB, PC i que dista $\frac{1}{3}$ de l'altura $\overline{AH}$ del costat $\overline{BC}$.

8.- Siga una circumferència de radi b centre (b,0). Siga O(0,0).
Siga la recta $r \equiv x = a \qquad 0 \le a \le 2b$.
Siga P un punt de la circumferència.
Siga la recta s que passa pels punts O, P.
Les rectes r i s es tallen en el punt R.
Siga la recta t perpendicular a r que passa per P, que talla la recta r en Q.
Siga la recta n que perpendicular a r que passa per R.
El segment $\overline{OQ}$ talla la recta n en el punt N.

Determineu el lloc geomètric del punt N al variar P sobre la circumferència.



Solució:
L'equació de la circumferència de centre (b,0) i radi b té equació:
$C_1 \equiv (x-b)^2 + y^2 = b^2$
Siga $P(x_o, y_o)$ un punt qualsevol de la circumferència C_1.
La recta s que passa pels punts O, P té equació: $s \equiv y = \frac{y_o}{x_o}x$.
la recta t perpendicular a r que passa per P té per equació:
$t \equiv y = y_o$.
La intersecció de les rectes r i s és el punt R que té per coordenades: $R\left(a, \frac{y_o a}{x_o}\right)$.
La intersecció de les rectes r i t és el punt Q que té coordenades: $Q(a, y_o)$.
Siga m la recta que passa pels punts O, Q que té equació: $m \equiv y = \frac{y_o}{a}x$.
La recta n que perpendicular a r que passa per R té equació: $n \equiv y = \frac{y_o a}{x_o}$.
La intersecció de les rectes m, n és el punt N que té coordenades: $N\left(\frac{a^2}{x_o}, \frac{y_o a}{x_o}\right)$.

Siga $\begin{cases} x = \dfrac{a^2}{x_o} \\ y = \dfrac{y_o a}{x_o} \end{cases}$. Aleshores, $\frac{x_o}{a} = \frac{a}{x}, \quad x_o \in [a, 2b]$

$y = \frac{y_o x}{a}$. Elevant al quadrat:

$y^2 = \frac{{y_o}^2 x^2}{a^2}$. Per ser $P(x_o, y_o)$ de la circumferència ${y_o}^2 = b^2 - (x_o - b)^2$:

$y^2 = \frac{\left(b^2 - (x_o - b)^2\right)x^2}{a^2}$. $\qquad \frac{y^2}{x^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_o}{a} - \frac{b}{a}\right)^2$.

$\frac{y^2}{x^2} = -\left(\frac{x_o}{a}\right)^2 + \frac{2bx_o}{a^2}$. $\qquad \frac{y^2}{x^2} = -\left(\frac{a}{x}\right)^2 + 2\frac{b}{a}\frac{a}{x}$.

Aleshores:

$y^2 = -a^2 + 2bx \quad x \in \left[\frac{a^2}{2b}, a\right]$. És un tros una paràbola.

9.- La corba intersecció de l'esfera $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-4=0$ amb el plànol $x+y-z-1=0$ és projecta ortogonalment sobre el plànol coordenat XOY.
Estudieu la cònica projecció. Determineu la seua equació reduïda.

Solució:
La intersecció de l'esfera i el plànol es la solució del sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-4=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases}$$

Per a projectar-la sobre el p
lànol XOY cal eliminar la incògnita z:

$$\begin{cases} x^2+y^2+(x+y-1)^2-2x-2y-4(x+y-1)-4=0 \\ z=x+y-1 \end{cases}$$

Simplificant:

$2x^2+2y^2+2xy-8x-8y+1=0$.

Estudiem aquesta cònica:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-29\neq 0.$$

$$|A_{33}|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3>0.$$

$(a_{11}+a_{22})|A|=(2+2)(-29)=-116<0$.

Aleshores, és una el·lipse real:

La seua equació reduïda serà de la forma $\lambda_1\cdot x^2+\lambda_2 y^2+c_3=0$,

On λ_1,λ_2 són els zeros de l'equació: $z^2-(a_{11}+a_{22})z+|A_{33}|=0$ i $c_3=\dfrac{|A|}{|A_{33}|}$.

$z^2-4z+3=0$ els zeros són: $\lambda_1=1,\lambda_2=3$.

$$c_3=\frac{|A|}{|A_{33}|}=-\frac{29}{3}.$$

Aleshores l'equació reduïda de l'el·lipse és:

$$1x^2+3y^2-\frac{29}{3}=0.$$

$$\frac{x^2}{\frac{29}{3}}+\frac{y^2}{\frac{29}{9}}=1.$$