

Tema 36.
Proporcions ntables.
El nombre d'or

Definició: Segments proporcionals.

Siga A un conjunt de n segments de longituds a_1, a_2, \dots, a_n

Siga B un conjunt de n segments de longituds b_1, b_2, \dots, b_n

Direm que els segments del conjunt A són proporcionals als segments del conjunt B si

existeix $r \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = r$.

Al nombre real r s'anomena raó de proporcionalitat dels segments.

Propietat:

Siga A un conjunt de n segments de longituds a_1, a_2, \dots, a_n

Siga B un conjunt de n segments de longituds b_1, b_2, \dots, b_n

Si els segments de A són proporcionals als segments de B, i r és la raó de proporcionalitat aleshores,

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_i + a_j}{b_i + b_j} = r.$$

Demostració: trivial.

Teorema de Tales

Si dues rectes secants r , s són tallades per paral·leles a , b , els segments que determinen sobre una de les secants són proporcionals als segments que determinen en l'altra secant.

$$a) \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}}$$

També s'acompleix:

$$b) \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} \quad c) \frac{\overline{OA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BB'}}$$

Demostració de l'apartat a) :

Dibuixem les diagonals del trapezi $AA'B'C$.

Notem que els triangles $\triangle ABA'$, $\triangle AB'A'$ tenen la mateixa àrea ja que considerant la base $\overline{AA'}$ dels dos triangles tenen la mateixa altura h ja que $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$ són paral·lels.

àrea $\triangle ABA'$ = àrea $\triangle AB'A'$. Aleshores:

$$\frac{\text{àrea } \triangle OAA'}{\text{àrea } \triangle ABA'} = \frac{\text{àrea } \triangle OAA'}{\text{àrea } \triangle AB'A'} \quad (1)$$

Considerem els triangles $\triangle ABA'$, $\triangle OAA'$

Notem que h' és:

- L'altura del triangle $\triangle ABA'$ sobre el costat \overline{AB} .
- L'altura del triangle $\triangle OAA'$ sobre el costat \overline{OA} .

Aleshores:

$$\text{àrea } \triangle OAA' = \frac{\overline{OA} \cdot h'}{2} \quad \text{àrea } \triangle ABA' = \frac{\overline{AB} \cdot h'}{2}$$

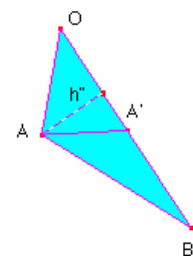
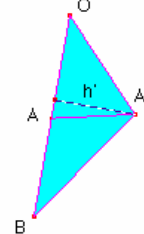
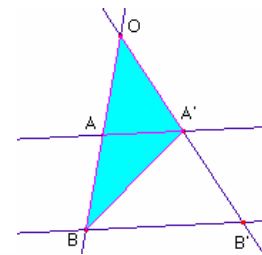
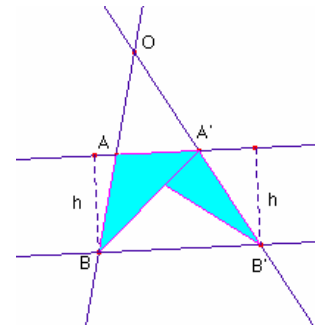
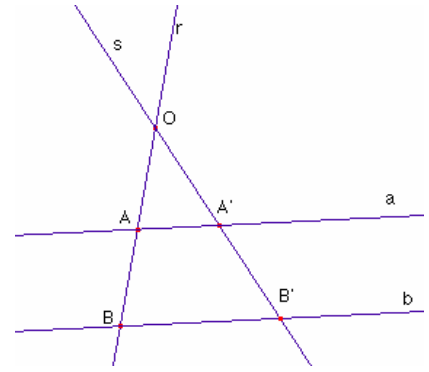
$$\text{Per tant, } \frac{\text{àrea } \triangle OAA'}{\text{àrea } \triangle ABA'} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}$$

Anàlogament demostrariem que:

$$\frac{\text{àrea } \triangle OAA'}{\text{àrea } \triangle AB'A'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}}$$

L'expressió (1) quedaria:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}}$$

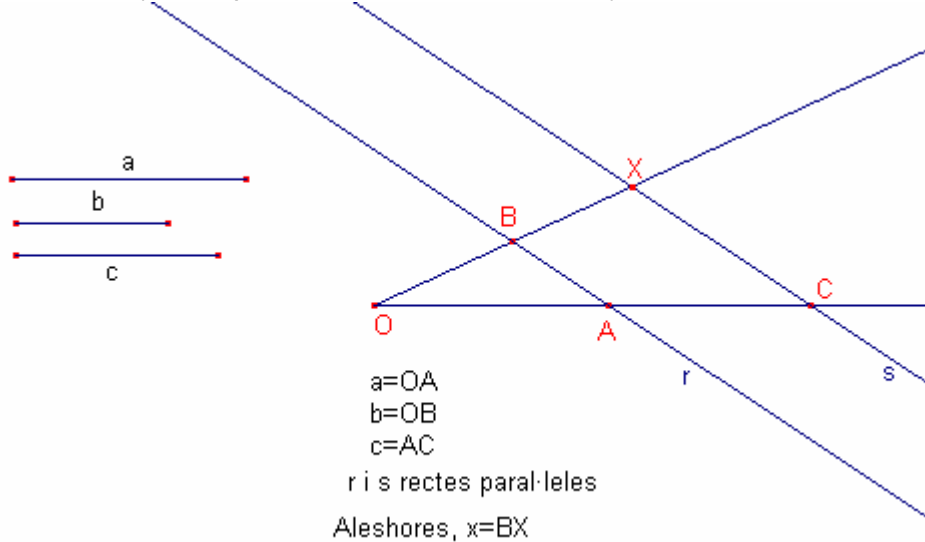


Quart proporcional de tres segments.

Donats els segments a, b, c direm que el segment x és quart proporcional dels segments a, b, c si:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Construcció (conseqüència del teorema de Tales):



Tercer proporcional de dos segments.

Donats els segments a, b, direm que x és tercer proporcional dels segments a, b si:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

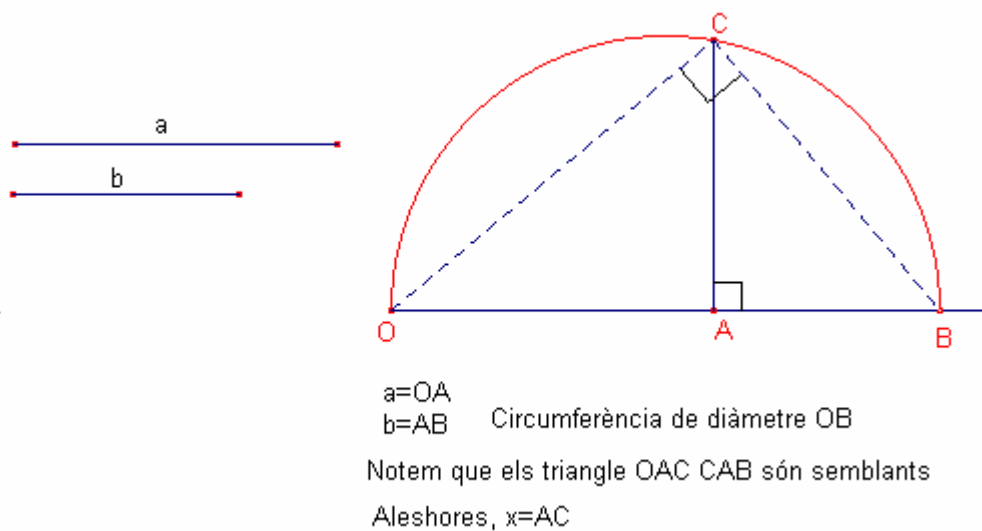
Construcció: la mateixa que el quart proporcional.

Mitjana proporcional de dos segments.

Donats els segments a, b, direm que x és tercer proporcional dels segments a, b si:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Construcció (conseqüència del teorema de Tales).



El nombre d'or

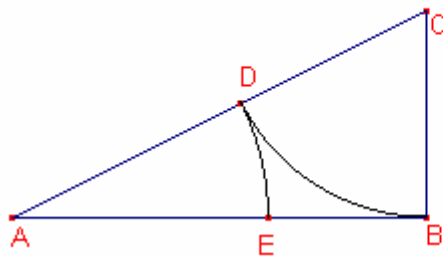
Divisió àuria d'un segment.

Donat un segment \overline{AB} siga E un punt interior del segment divideix el segment en dues parts $\overline{AE}, \overline{EB}$.

Direm que el punt E divideix el segment en proporció àuria (o bé en mitjana i extrema

raó) si $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \Phi$

A la raó de proporcionalitat Φ s'anomena nombre d'or o auri.



AB= 5,48 cm
AE= 3,38 cm
EB= 2,09 cm
AB/AE= 1,6180339887
AE/EB= 1,6180339887

Calculem el valor de Φ .

Siga $a = \overline{AB}$, $x = \overline{AE}$

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$

$$a(a-x) = x^2$$

$$a^2 - ax = x^2$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

Resolem l'equació en la incògnita x

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4(-a^2)}}{2} = a \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$$

Aleshores $x = a \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$ per ser x un valor positiu.

$$\text{Per tant } \Phi = \frac{a}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Propietats del nombre d'or

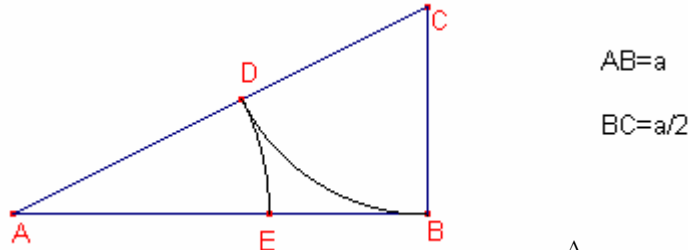
Propietat 1

El nombre d'or és un nombre irracional.

Propietat 2

El nombre d'or es pot construir amb regle i compàs.

Prova a



Siga el segment $\overline{AB} = a$. Construïm el triangle rectangle $\triangle ABC$, tal que $\overline{BC} = \frac{a}{2}$.

Pel teorema de Pitàgores notem que $\overline{AC} = a \frac{\sqrt{5}}{2}$

Dibuixem l'arc de circumferència de centre C que passa pel punt B el qual talla la hipotenusa \overline{AC} en el punt D. $\overline{CD} = \frac{a}{2}$

Notem que $\overline{AE} = \overline{AC} - \overline{CD} = a \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$, $\overline{EB} = \overline{AB} - \overline{AE} = a \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)$

Podem veure que amb aquesta construcció $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Propietat 3:

El nombre d'or és l'únic nombre real positiu que $\Phi^2 = 1 + \Phi$, $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$

Propietat 4

Les potències del nombre d'or formen una successió de Fibonacci.

$$\Phi^0 = 1$$

$$\Phi^1 = \Phi$$

$$\Phi^2 = 1 + \Phi$$

$$\Phi^3 = \Phi + \Phi^2$$

$$\Phi^4 = \Phi^2 + \Phi^3$$

.....

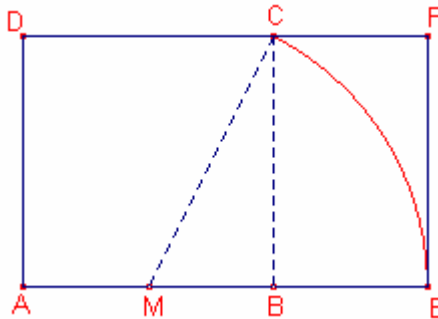
$$\Phi^n = \Phi^{n-2} + \Phi^{n-1}$$

Rectangle d'or o rectangle de proporció àuria.

Direm que un rectangle té la proporció àuria si la proporció del seus costats és el nombre d'or.

Propietat 5

El rectangle d'or es pot construir amb regla i compàs a partir d'un costat.



Dibuixem el quadrat

ABCD.

Siga M el punt mig del segment \overline{AB} .

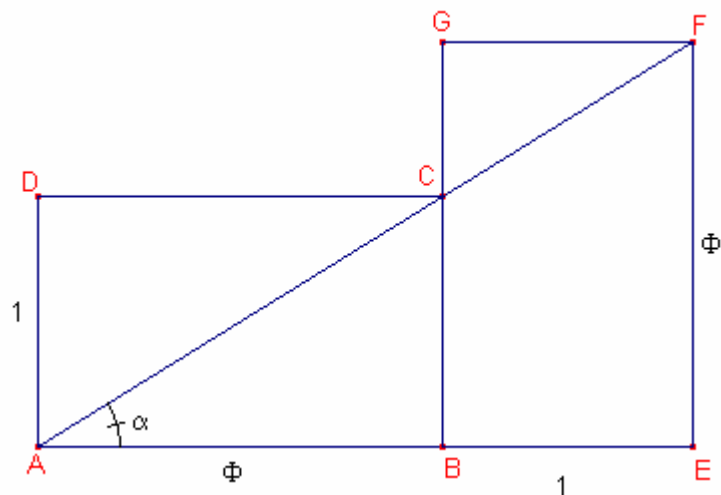
Dibuixem l'arc de circumferència de centre M que passa pel punt C.

L'arc de circumferència talla la prolongació del costat \overline{AB} en el punt E.

Es pot comprovar fàcilment que $\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$

Propietat 6

El rectangle de proporció àuria és l'únic rectangle en el qual la prolongació d'una diagonal conté el vèrtex del rectangle adjacent situat verticalment.



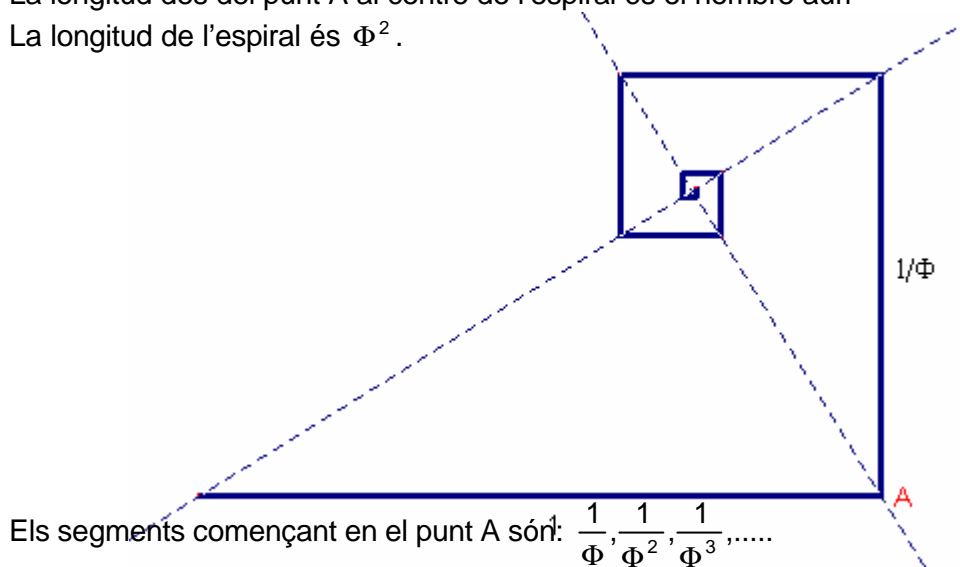
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\Phi} = \frac{\Phi}{\Phi^2} = \frac{\Phi}{1 + \Phi}$$

Propietat 7:

Considerem l'espiral rectilínia (començant pel segment unitat) segons la proporció àuria

La longitud des del punt A al centre de l'espiral és el nombre auri

La longitud de l'espiral és Φ^2 .



La longitud dels del punt A al centre de l'espiral és:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\Phi} \right)^n = \frac{\frac{1}{\Phi}}{1 - \frac{1}{\Phi}} = \frac{1}{\Phi - 1} = \Phi$$

La longitud de l'espiral és $1 + \Phi = \Phi^2$

El nombre d'or en el pentàgon.

Propietat 8

Demostreu que la proporció entre la diagonal i el costat d'un pentàgon regular és el

$$\text{nombre d'or } \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Demostració 1:

Siga el pentàgon regular de costat $\overline{AB} = a$

Siga la diagonal del pentàgon $\overline{AC} = d$

Per ser inscrits en la circumferència, els angles

$$\angle BAC = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$\angle ABC = \frac{3 \cdot 360^\circ}{5} = 108^\circ$$

L'angle $\angle ACB = 36^\circ$

Els angles $\angle ABF = 72^\circ$, $\angle AFB = 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = 72^\circ$,

El triangle $\triangle ABF$ és isòsceles, per tant, $\overline{AF} = \overline{AB} = a$

Per ser inscrit en la circumferència, l'angle $\angle CBF = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

Els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle BFC$ són semblants:
Pel teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FC}} \Rightarrow \frac{d}{a} = \frac{a}{d-a} \Rightarrow a^2 = d(d-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 - ad - a^2 = 0 \Rightarrow d = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = a \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

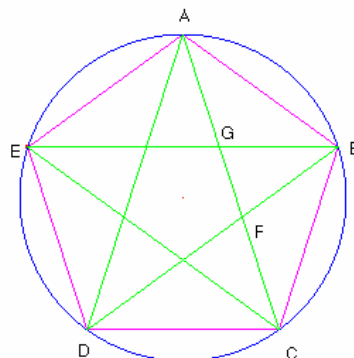
Per tant,

$$\frac{d}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Nota: el valor negatiu de la solució no és vàlid perquè la diagonal és positiva.

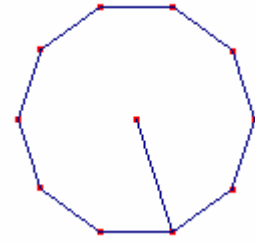
Propietat 9:

$$2 \cos 36^\circ = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



Propietat 10

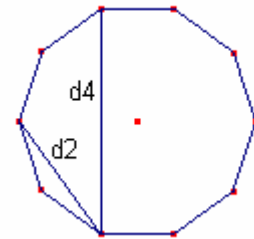
La proporció entre el radi de la circumferència circumscrita al decàgon regular i el costat del decàgon regular és el nombre d'or $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



Propietat 11

La proporció entre la diagonal que uneix 5 vèrtexs consecutius i la diagonal que uneix 3 vèrtexs consecutius és el nombre

$$\text{d'or } \Phi = \frac{d_4}{d_2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



Altres propietats del nombre d'or

Propietat 12

Considerem la suma de fraccions infinita:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

$$\lim 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} = \Phi$$

Propietat 13

Siga: $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$

$$\lim \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} = \Phi$$

La proporció $\sqrt{2}$, format del paper DIN A

Un rectangle de costats a , b , $a > b$ si al doblar-lo pel la meitat del costat major queda un rectangle de costat proporcionals a l'inicial.

$$\text{És a dir, } \frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{a}{2}}$$

Calculem la proporció:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{\frac{a}{b}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$$

Aleshores la raó de proporcionalitat és $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$.