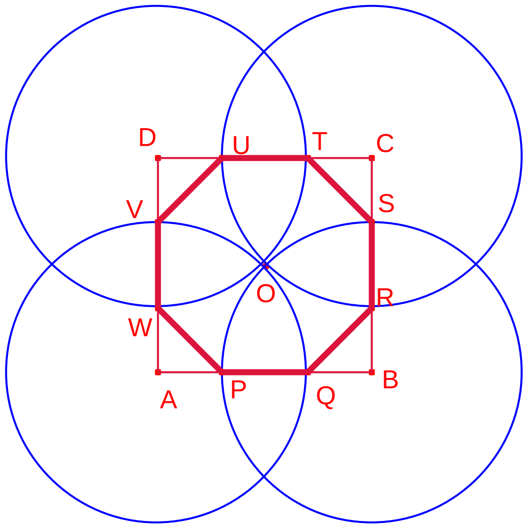
Problema 6
Donat un quadrat, es dibuixen les 4 circumferències de centre els vèrtexs i que passen pel centre del quadrat. Les 4 circumferències tallen en 8 punts els costats del quadrat. Demostreu que els punts formen un octògon regular.
Kömal C1012, desembre 2009.

Solució:
Siga el quadrat ABCD de centre O.
Sense perdre generalitat podem suposar que els costat del quadrat és $\overline{AB} = 1$.
Siga PQRSTUVW l'octògon que determinen les interseccions de les 4 circumferències i els costats del quadrat ABC.



Notem que $\overline{PQ} = \overline{RS} = \overline{TU} = \overline{VW}$,
$\overline{QR} = \overline{ST} = \overline{UV} = \overline{WP}$.

$\overline{AC} = \sqrt{2}$, $\overline{AO} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\overline{AQ} = \overline{BP} = \overline{AO} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\overline{PQ} = \overline{AQ} + \overline{BP} - \overline{AB} = \sqrt{2} - 1$.

$\overline{BQ} = \overline{AB} - \overline{AQ} = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $Q\overset{\Delta}{B}R$:

$\overline{QR} = \overline{QB} \cdot \sqrt{2} = \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$.

Aleshores, $\overline{PQ} = \overline{QR}$. Aleshores els costats de l'octògon són iguals.
$\angle BQR = 45^o$.
$\angle PQR = 180^o - 45^o = 135^o$. Aleshores els angles de l'octògon són iguals.
Per tant, l'octògon PQRSTUVW són iguals.